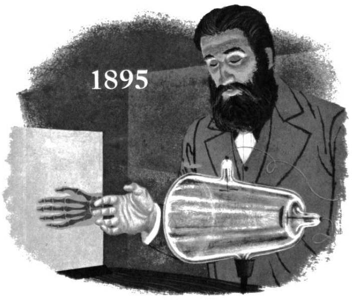
Fra Röntgen til moderne scannere

Peter Toft og Peter Philipsen, Institut for Matematisk Modellering DTU



Figur 1: Röntgen opdager en ny type stråling. Billedet er fra *Vor ven Atomet* af Heinz Haber.

Figur 2: Overfladen af rekonstrueret hjerne scan fra en moderne PET scanner – 1996.

Det er den 8. november 1895 i Würzburg i Tyskland. Professor Wilhelm Conrad Röntgen arbejder på en fysik opstilling. Et næsten lufttomt elektronudladningsrør med passende høj spænding over danner en elektronstråle. Et stykke fra udladningsrøret har Röntgen placeret en fluorescerende skærm. Princippet minder meget om den teknik, vi nu anvender i TV-apparater. Denne dag er afstanden mellem udladningsrør og den fluorescerende skærm så stor, at elektroner umuligt ville kunne nå over til den fluorescerende skærm, men til sin store forbløffelse ser Röntgen, at skærmen alligevel lyste op i mørket. Først sætter Röntgen et stykke pap mellem elektronkilde og skærm, og skærmen gløder stadig, dernæst erfarer han, at en tynd metalplade kun svækker lyset. Röntgen får sit store chok, da han sætter sin hånd mellem elektronrøret og skærmen, for han ser sin egen skelethånd på skærmen.

En stor opdagelse er gjort. Disse nye og mærkelige stråler fik navnet X-stråler, en betegnelse der er holdt fast i den engelsktalende verden (*X-rays*). Bl.a. i Danmark hædrer vi opfinderen ved at bruge betegnelsen Röntgenstråler.

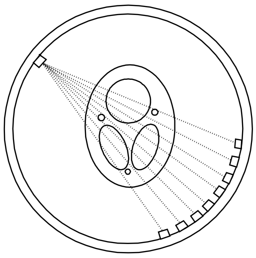
Eksperimenterne tog fart, og Röntgen blev hurtigt berømt. Man fandt ud af, at strålerne gennemtrængte kød bedre end knogler, fordi knogler er mere tætte og dermed absorberer mere. Derfor ses knogler som en skygge på den fluorescerende skærm. Snart blev skærmen udskiftet med en fotografisk plade, og dermed var Röntgenbilleder en realitet. Det første, hvor Röntgen har taget sin kones hånd, er vist på figur 3.

Nu, 100 år efter opdagelsen, er Röntgenrør blevet almindelige og indbygges i apparater, hvorfor Röntgenbilleder blevet klinisk praksis på næsten alle hospitaler og i mange tandlægeklinikker.

Et problem, som har naget mange fysikere og læger, er, at man med Röntgenbilleder kun får en projektion igennem objektet. Dermed kan strukturer skygge for hinanden og evt. blive tolket forkert. Derfor har man i de sidste 30 år arbejdet med forskellige typer scannere, som kan vise det indre af objektet i hvert punkt, enten som todimensionale snit eller nu som tredimensionale volumener.

En scannertype, som netop anvender Röntgenstråler, er CT-scanneren, hvor CT står for *Computerized Tomography*. Princippet er vist på figur 4. Et Röntgenrør udsender stråler, som i rette linier går gennem objektet og svækkes alt efter hvilket stof, der gennemtrænges. Intensiteten af de svækkede stråler måles med et stort antal detektorer, som sidder monteret på en ring overfor Röntgenrøret.

Figur 3: Det første Röntgenbillede. Billedet er fra *Videnskabens hvornår skete det* fra Politikens Forlag.

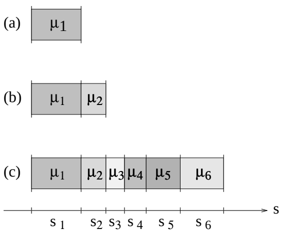


Figur 4: En skitse af en CT-scanner med et Röntgenrør og en række modstående detektorer.

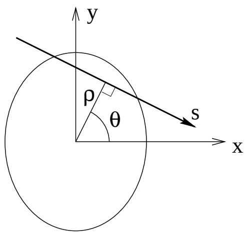
Hele opstillingen roteres om objektet, så man får målt dæmpningen langs stråleveje med alle mulige orienteringer og afstande fra centrum.

Virkemåden af CT-scanneren kan forstås ud fra en enkelt strålevej. Fra den grundlæggende fysik vides, at Röntgenstråling dæmpes eksponentielt med tykkelsen. På figur 5 haves i tilfælde (a) en klods med tykkelse s_1 og dæmpningskoefficient μ_1. I dette tilfælde bliver den målte intensitet I divideret med den indkommende intensitet I_0 givet som vist i første del af formel 1. Anvendes denne dæmpningslov for de heterogene medier i tilfælde (b) og (c) findes tilsvarende de to sidste udtryk af formel (1)

$$(a) : \frac{I}{I_0} = \exp\left(-\mu_1 s_1\right) \quad (b) : \frac{I}{I_0} = \exp\left(-\mu_1 s_1 - \mu_2 s_2\right) \quad (c) : \frac{I}{I_0} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{6} \mu_i s_i\right) \quad (1)$$



Figur 5: Tre forskellige dæmpende medier.



Figur 6: Parametre anvendt til at beskrive linier.

Imidlertid må en god model antage, at dæmpningen varierer langs strålevejen, hvorfor man må lade lagtykkelserne gå mod 0 i sidste del af formel 1. Lægges en s-akse ind langs strålevejen, fås projektionen $\mathcal{P}$

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(s)\ ds\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{I_0}{I}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(s)\ ds = \mathcal{P} \qquad (2)$$

Ideen med en CT-scanner er, at man med en kendt kildestyrke I_0 måler den svækkede intensitet I for alle placeringer af linien i scannerens plan. Ifølge formel 2 har man således adgang til integraler af den dæmpningskoefficient, man gerne vil finde i hvert punkt af objektet.

Der indlægges et koordinatsystem som vist på figur 6. Parametriseres strålevejen med den vinkelrette afstand ρ og vinklen θ, vil projektionerne blive en todimensional funktion $\mathcal{P}(\rho,\theta)$. Denne funktion kaldes normalt sinogrammet og kan vises som et billede, se figur 7. Anvendes formel (2) i dette koordinatsystem, hvor dæmpningen μ nu er en funktion af x og y, fås

$$\mathcal{P}(\rho,\theta) = \int \mu(x,y)\ ds = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\rho\cos\theta - s\sin\theta, \rho\sin\theta + s\cos\theta)\ ds \tag{3}$$

Anvendes Diracs delta function ($\delta(x) = 0$ hvis $x \neq 0$ og $\int \delta(x)dx = 1$) kan formel (3) skrives som

$$\mathcal{P}(\rho,\theta) = \check{\mu}(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,y)\ \delta(\rho - x\cos\theta - y\sin\theta)\ dx\ dy \tag{4}$$

Fra matematikken er dette kendt som *Radontransformationen*, og projektionerne $\check{\mu}(\rho,\theta)$ er den Radon transformerede af dæmpningen $\mu(x,y)$. Transformationens navn har intet at gøre med grundstoffet Radon, idet den er opkaldt efter en tysk matematiker Johann Radon, der i en artikel i 1917 formulerede problemet og en teknik til at invertere transformationen, dvs. at rekonstruere $\mu(x,y)$, når $\check{\mu}(\rho,\theta)$ er kendt. Den i praksis mest udbredte rekonstruktionsteknik er *Filtrered Backprojection*. Algoritmen består af to trin: Først en højpas filtrering af sinogrammet, hvor kanter fremhæves, og langsomme variationer fjernes. Dernæst tilbageprojiceres sinogrammet (deraf navnet *Backprojection*), og derved findes dæmpningen $\mu(x,y)$.

Filtrering

$$\bar{\mu}(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} |\nu| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \check{\mu}(\tilde{\rho},\theta)\ e^{-j2\pi\tilde{\rho}\nu}\ d\tilde{\rho}\right]\ e^{j2\pi\rho\nu}\ d\nu \tag{5}$$

Det inderste integral er Fourier transformation og yderste integral er tilsvarende den inverse Fourier transformation. Højpas filteret er den absolutte værdi af frekvensen ν.

Tilbageprojektion

$$\mu(x,y) = \int_0^{\pi} \bar{\mu}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\ d\theta \tag{6}$$

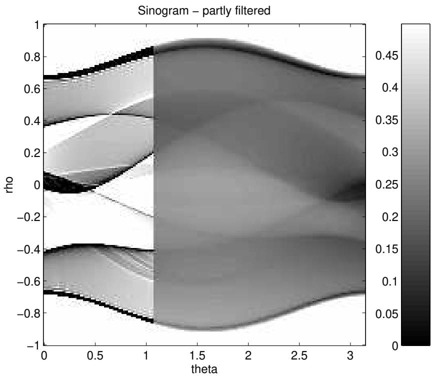
Dvs. efter filtrering skal der integreres langs en sinusformet kurve i sinogrammet, og værdien giver det rekonstruerede billede. På figur 8 er vist det rekonstruerede billede ud fra sinogrammet på figur 7. Har man adgang til internettet kan man på WWW-adressen `http://hendrix.ei.dtu.dk´ bl.a. finde en såkaldt MPEG-film, der viser hele rekonstruktionsprocessen.

Det skal næves, at der findes andre rekonstruktionsformler [4, 5], bl.a. Radon's oprindelige rekonstruktions formel.

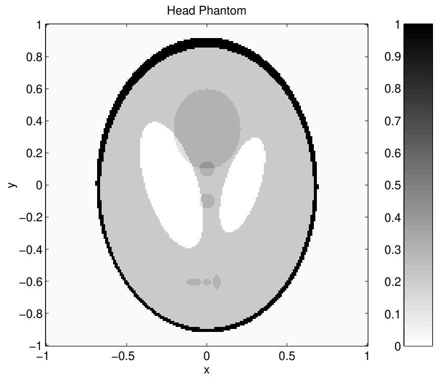
$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial\check{g}(\rho,\theta)}{\partial\rho}}{x\cos\theta + y\sin\theta - \rho}\ d\theta \tag{7}$$

Det er blevet demonstreret, at man med en CT-scanner kan danne billeder af dæmpningen i objekter. Teknikken er meget velegnet til at visualisere og diagnostisere, f.eks. knogledefekter. En gruppe fra Institut for Matematisk Modellering (IMM) ved DTU har sammen med forskere fra tandlægehøjskolen og Datalogisk Institut KU dannet 3DLab, som bla. arbejder med 3D modeller dannet ud fra CT-scan.

Det matematiske grundlag i Radon transformationen har også medført forskning i andre typer scannere. En anden meget udbredt scanner er MR- eller MRI-scanneren, som står for *Magnetic Resonance Imaging*. Scanneren udsætter ikke patienten for Röntgenstråling, men anvender meget kraftige magneter, som påvirker atomkernernes spin. Scanneren måler indirekte mængden af vand i



Figur 7: Et syntetisk sinogram, hvor den venstre del er blevet filtreret.



Figur 8: Rekonstrueret billede.

alle punkter af patienten. MR-scanneren giver normalt en meget fin opløsning i de færdige billeder, hvorfor meget små anatomiske detaljer kan afsløres. En variant af MR-scanneren er den helt nye teknik fMRI, der kan måle tidslige ændringer i flow, f.eks. i hjernen.

PET scanning (*Positron Emission Tomography*) og SPECT scanning (*Single Photon Emission Computed Tomography*) er teknikker, som bla. anvendes ved PET-centeret ved Rigshospitalet og Bispebjerg Hospital til at måle bla. sukkeromsætning (glukose metabolismen) i hjernen og dermed hjerneaktiviteten. Dette gøres ved at patienten får indsprøjtet en meget lille dosis af et radioktivt stof, en såkaldt tracer, som vil henfalde svarende til den stedlige aktivitet. Derefter bliver henfaldet detekteret af en ring af detektorer placeret omkring patienten.

Forskergruppen CONNECT fra IMM ved DTU og Niels Bohr instituttet ved KU er sammen med forskere fra Neurologisk Afdeling ved Rigshospitalet og Hvidovre Hospital den danske hjørnesten i det internationale forskningsprojekt *The Human Brain Projekt*, der bl.a. arbejder med neurale netværk til tolkning og udvikling af fMRI-scanning og PET-scanning.

Relevant Litteratur

[1] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Ver. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Phys. Kl.*, 69:262–277, April 1917.

[2] Peter Toft. Radontransformation. Institut for Matematisk Modellering (tidligere Elektronisk Institut), Danmarks Tekniske Universitet, 1994.

[3] Trine Andreasen, Tine G. Christiansen, Nina S. Hansen og Christine Iversen. RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning. Roskilde Universitets Center, Tekster fra IMFUFA nr. 244, 1993

[4] A. K. Jain. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, 1989.

[5] S. R. Deans. *The Radon Transform and Some of Its Applications*. Krieger Publishing Company. 1993. Malabar, Florida.

[6] Frank Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. John Wiley & Sons, 1986.