Del III

Preprocessering og postprocessering af PET billeder

Indholdsfortegnelse

III Preprocessering og postprocessering af PET billeder i

1 Indledning 1
1.1 Preprocessering . . . 1
1.2 Postprocessering . . . 2

2 Filtrering af sinogrammet – preprocessering 3
2.1 Hvorfor benytte preprocessering . . . 3
2.2 To-dimensional filtrering . . . 3
2.2.1 Middelværdi filteret . . . 4
2.2.2 Median filteret . . . 4
2.3 Forbedringer af Filtred Backprojection . . . 4
2.3.1 Hanning vægtfunktionen . . . 5
2.3.2 Hamming vægtfunktionen . . . 5
2.3.3 Shepp-Logan vægtfunktionen . . . 6
2.3.4 Andre vægtfunktioner . . . 6
2.4 Forslag til filtertyper . . . 7
2.5 Testkørsler . . . 7
2.5.1 Resultater efter middelværdi filtrering . . . 8
2.5.2 Resultater efter Median filtrering . . . 9
2.5.3 Resultater ved brug af vægtfunktioner i Filtered Backprojection . . . 14
2.6 Konklusion . . . 14

3 Postprocessering af PET billeder 17
3.1 Valg af model . . . 17
3.1.1 CMRF modellen . . . 17
3.2 Bayes sætning . . . 18
3.3 Model af det ønskede billede, prior . . . 18
3.3.1 Model med uafhængige kantelementer . . . 19
3.3.2 Prior med lokale kantelementer . . . 19
3.3.3 Stedafhængige vægtparametre for kantelementerne . . . 22
3.4 Model af degenerationsprocessen . . . 23
3.5 Model for det rekonstruerede billede . . . 23
3.6 Resumé . . . 24

4 Opdatering af model – Mean Field Annealing 25
4.1 Valg af annealing strategi for temperaturen . . . 25
4.2 Opdateringsformler . . . 26
4.2.1 Opdatering af billedelementerne . . . 26

4.2.2 Andre opdateringsformler 26
4.2.3 Opdatering af kantelementerne 27
4.3 Resumé 27

5 Resultater **28**
5.1 Fantomets opbygning 28
5.2 Annealing parametre 30
5.3 Fastlæggelse af modellens parametre 30
5.3.1 Check af annealing parametre 32
5.3.2 Resultater ved brug af snake som prior 32
5.4 Generel estimering af parametere 35
5.5 Konklusion 35

Bibliografi **37**

A Artikel om brug af snake i rekonstruktion af billeder. **39**

B Program til preprocessering **40**
B.1 Parametre 40
B.2 Program udskrift 40

C Program til postprocessering **41**
C.1 Paremetre 41

D Oversigt over 'Mean Field' programmet **42**
D.1 Funktionsbeskrivelse 42
D.2 Placering af filerne på disketten 43

Kapitel 1

Indledning

Som det fremgår af første del af rapporten, har rigtige sinogrammer ofte et dårligt signal/støj forhold. Kvaliteten af det inverterede billede kan forbedres ved at benytte preprocessering af sinogrammet eller – efter rekonstruktion – at benytte postprocessering [Jai89].

Der er implementeret både pre-og postprocessering, hvor preprocesseringen består i normale filtermetoder til filtrering af sinogrammet, og desuden en ændring i Filtered Backprojection algoritmen, så yderligere filtrering indbygges.

Som postprocessering benyttes også filtrering, men denne er ulineær, idet der tages hensyn til den efterfølgende tolkning af billedet. Tolkningen indebærer blandt andet et ønske om at bevare og forstærke reelle kanter i det rekonstruererede billede. Dette kan eventuelt være indenfor et begrænset område af det inverterede billede.

Der vil, ligesom i 1. del af rapporten, kun blive betragtet to-dimensionelle signaler. Dog kan visse af de beskrevne filtre direkte udvides til tre dimensioner.

1.1 Preprocessering

Der er mulighed for to typer af preprocessering. Den ene foregår direkte på sinogrammet, og kan benyttes før alle rekonstruktionsrutinerne, den anden er integreret i Filtered Backprojection algoritmen og kan derfor kun benyttes ved invertering med denne.

Der er implementeret filtre, som kan betragtes som almindelige billedbehandlingsrutiner, og de er derfor ikke specialkonstrueret til at filtrere sinogrammet. Disse filtre er to-dimensionelle med fleksibelt udbreddelsesområde.

Der er implementeret to typer filtre med variabel filterkernebredde:

- Middelværdi filter.
- Median filter.

Median filteret er, som det eneste preprocesseringsfilter, ulineært. Begge filtre kan også benyttes på rekonstrurede billeder, men vil ikke blive benyttet i denne rapport.

Til Filtered Backprojection algoritmen er der implementeret andre typer filtre end Ram-Lak filtereret, disse er tilføjet som vægtfunktioner til det oprindelige Ram-Lak filter. Denne filtrering foretages i frekvensdomænet og er én-dimensional i frekvens parameteren ν's retning.

1.2 Postprocessering

Som postprocessering af det rekonstruererede billede, er det også muligt at foretage simple filteringer. Disse er ikke implementeret, da det kan vises, at den to-dimensionelle foldning svarer til en én-dimensional foldning i Radonrummet [Dea93]. Foldningen i Radonrummet sker langs ρ-retningen, og foldningskernen i Radonrummet kan bestemmes ved Radon transformation af den to-dimensionelle foldningskerne. Derfor kan lineær filtrering flyttes fra det rekonstruerede billede, postprocessering, til filtrering af sinogrammet, preprocessering.

Desuden har traditionelle filtre en tendens til at udglatte kanterne i billedet, hvilket ikke altid er gavnligt ved den efterfølgende tolkning af billedet.

Der er derfor implementeret et ulineært filter, som er baseret på en statistisk tolkning af billedet. Metoden er oprindelig foreslået af Geman og Geman [GG84], og ideen er at tillade diskontinuiteter og foretage en filtrering imellem disse.

Den udviklede model baseres på *Bayes*[1] sætning. Der er benyttet en *Mean Field* approksimation til den af Geman og Geman [GG84] foreslåede *Simulated Annealing*, for at opnå hurtigere udførelsestid.

[1] Se afsnit 3.2

Kapitel 2

Filtrering af sinogrammet – preprocessering

Der vil i dette kapitel blive gennemgået nogle få klassiske filtreringsmetoder, som vil blive benyttet ved filtrering i Radonrummet. Der er desuden implementeret andre filtre til Filtered Backprojection. Resultaterne fra filtreringerne vil blive præsenteret.

2.1 Hvorfor benytte preprocessering

Filtrering er en nødvendighed ved målte PET data, da disse har et dårligt signal/støj forhold[1]. En af grundene til, at de observerede data har et dårligt signal/støj forhold, er, at de kan modelleres som genererede ved en Poisson proces, hvor variansen er den samme som middelværdien. Dette forhold betyder, at der kan være enkelte punkter i Radonrummet, der har en markant større værdi end nabopunkterne.

Da Radon transformationen er en lineær transformation, vil forskellen i værdi svare til en ekstra ret linie i det rekonstrurerede billede. Liniens parametre vil direkte kunne relateres til det oprindelige punkt i Radonrummet (se del I under Radon Transformationen).

Ved at modificere disse punkter er det muligt at forbedre rekonstruktionen og derved opnå et bedre resultat.

2.2 To-dimensional filtrering

De første typer af filtre er to-dimensionelle og anvendes på sinogrammet $X_{r,t}$, der har størrelsen $R \times T$. Det filtrerede sinogram tildeles symbolet $Y_{r,t}$.

Der er implementeret et middelværdi filter og et median filter, med hvilke der er mulighed for filtrering i én eller to dimensioner. Udgangspunktet for begge filtre er en filterkernestørrelse, der er variabel i både ρ-og θ-retningen. Filterkernen vil altid være symmetrisk omkring origo. Filterkernen specificeres ved at angive rækkevidden fra centrum i ρ- henholdsvis θ-retningen. Afstandene betegnes c_r og c_t, og filterlængderne vil så være bestemt som følger

$$F_r = 2 * c_r + 1 \text{ og } F_t = 2 * c_t + 1. \tag{2.1}$$

Der kan altså vælges filterlængder, i hver retning, af størrelsen $F = 2p + 1$ hvor $p \in Z$.

[1]Se del I kapitel 3.

Til en filtrering, med en filterkerne af størrelsen $F_r \times F_t$, vil der, for hvert enkelt element i billedet, gælde

$$Y_{r,t} = f(U_{r,t}) \tag{2.2}$$

hvor mængden $U_{r,t}$ indeholder følgende elementer fra det ikke filtrerede sinogram ($X_{r,t}$)

$$\begin{aligned} U_{r,t} \;=\; \{X_{j,i}| \quad & r - c_r \leq j \leq r + c_r \;\wedge\; t - c_t \leq i \leq t + c_t \\ & \wedge\; 0 \leq j \leq R-1 \;\wedge\; 0 \leq i \leq T-1\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Funktionen $f(\cdot)$ kan enten returnere middelværdien eller den valgte median. Det er muligt at implementere vilkårlige funktioner, men af disse er kun valgt to repræsentive. Til en filterkerne på 3×3 vil følgende værdier komme med i mængden $U_{r,t}$

$$\begin{aligned} U_{r,t} = \{ \;& X_{r-1,t+1}\,, \quad X_{r,t+1}\,, \quad X_{r+1,t+1}\,, \\ & X_{r-1,t}\,, \quad X_{r,t}\,, \quad X_{r+1,t}\,, \\ & X_{r-1,t-1}\,, \quad X_{r,t-1}\,, \quad X_{r+1,t-1}\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

hvor $r = 0, 1, ..., R-1$ og $t = 0, 1, ..., T-1$. Filterkernen vil dog mindskes, hvis der er elementer, som ikke eksisterer i det oprindelige billede, jvf. betingelserne i formel (2.3).

2.2.1 Middelværdi filteret

Middelværdi filteret er implementeret, så det har følgende form

$$f(U_{r,t}) = \frac{1}{||U_{r,t}||} \sum_{z \in U_{r,t}} z \tag{2.5}$$

hvor $||U_{r,t}||$ er antallet af elementer i $U_{r,t}$.

Filteret kan også implementeres i frekvensrummet. Dette er ikke implementeret, da filterkernebredden normalt er ret begrænset.

2.2.2 Median filteret

Median filteret er implementeret med mulighed for selv at vælge en vilkårlig fraktil. Elementerne i $U_{m,n}$ sorteres efter størrelse, så der gælder

$$z_j \leq z_{j+1} \qquad \text{for } z_j, z_{j+1} \in U_{r,t} \text{ og } j = 1, ..., (F_r \times F_t - 1). \tag{2.6}$$

Sorteringen af elementerne er implementeret med en quicksort algoritme fra Numerical Recipes. Funktionen $f_j(U_{r,t})$ vil så se ud som følger

$$f_j(U_{r,t}) = z_j \qquad , j = 1, ..., F_r \times F_t \tag{2.7}$$

hvor j er den ønskede fraktil.

2.3 Forbedringer af Filtred Backprojection

Filtered Backprojections første trin[2] er at foretage en filtrering i sinogrammet. Dette kan betragtes som en preprocessering af sinogrammet, før tilbageprojektionen foretages. Filtreringen foretages ved først at Fourier transformere i ρ-retningen for hvert eneste θ, dernæst multipiceres

[2] Se del I, kapitel 7.

med Ram-lak filteret $|\nu_r|$, og tilsidst benyttes en invers Fourier transformation i ρ-retningen. Ved at ændre Ram-Lak filteret i frekvensparameteren ν's retning, ved multiplikation med en vægtfunktion $w(r)$, kan der foretages en preprocessering af sinogrammet. Der er blevet implementeret følgende vægtfunktioner til ændring af Ram-Lak filteret

- Hamming.
- Hanning.
- Shepp-Logan.

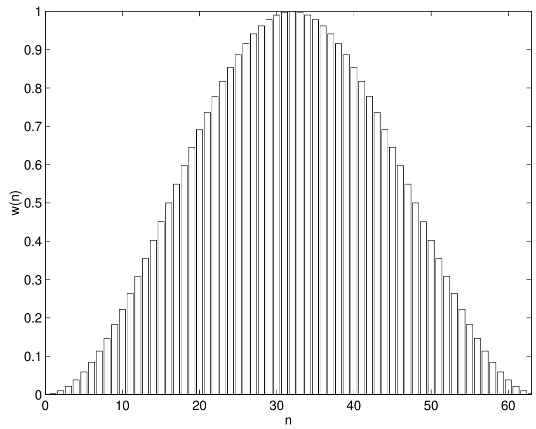
Disse vil alle dæmpe de høje frekvenser i ρ-retningen, hvilket modvirker, at højfrekvent støj forplanter sig videre. For en grundigere gennemgang af disse vægtfunktioner henvises til gennemgangen i [Har78] og [Jai89]. Vægtfunktionernes implementering er vist i de følgende afsnit. Vægtfunktionerne har længden N, og DC værdien er placeret i arrayet ved $N/2$.

2.3.1 Hanning vægtfunktionen

Hanning vægtfunktionen er implementeret således

$$w(n) = \frac{1}{2}\left[1.0 - \cos\left(\frac{2n}{N}\pi\right)\right], \quad n = 0, 1, ..., N-1. \tag{2.8}$$

Et eksempel på Hanning vægtfunktion er vist på figur 2.1 med $N = 64$.



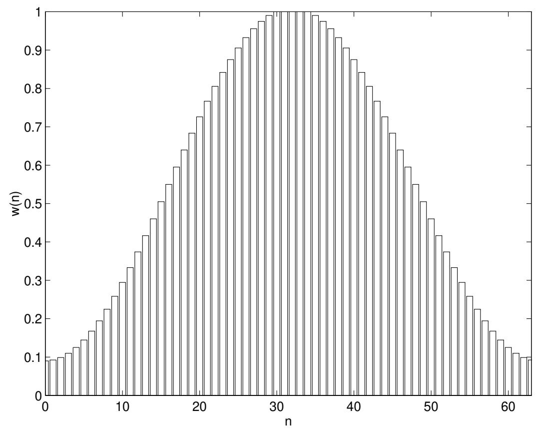
Figur 2.1: Hanning vægtfunktion med $N = 64$.

2.3.2 Hamming vægtfunktionen

En anden, ofte anvendt vægtfunktion, er Hammings vægtfunktion. Hamming vægtfunktionen kan implementeres således

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2n}{N}\pi\right), \quad n = 0, 1, ..., N-1. \tag{2.9}$$

Et eksempel på denne er vist på figur 2.2 for $N = 64$.



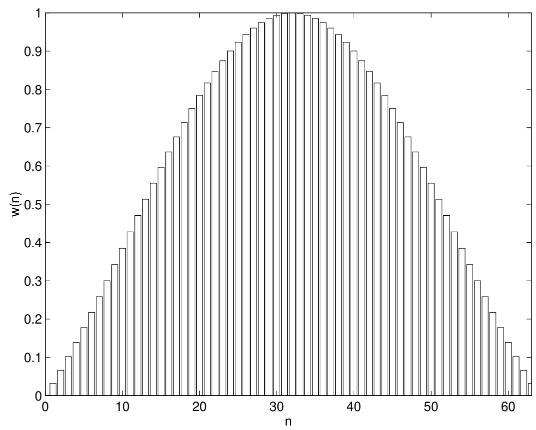
Figur 2.2: Hamming vægtfunktion med $N = 64$.

2.3.3 Shepp-Logan vægtfunktionen

En speciel vægtfunktion, til anvendelse under rekonstruktionen, er foreslået af Shepp og Logan (se Jain [Jai89]). Denne vægtfunktion kaldes Shepp-Logan vægtfunktionen og er implementeret således

$$w(n) = \frac{\sin\left(\frac{2n-N}{N}\pi\right)}{\left(\frac{2n-N}{N}\pi\right)} \quad n = 0, 1, ..., N-1. \tag{2.10}$$

Denne vægtfunktion er for $N = 64$ vist på figur 2.3.



Figur 2.3: Shepp-Logan vægtfunktion med $N = 64$.

2.3.4 Andre vægtfunktioner

Der findes adskillelige vægtfunktioner, som er udviklet til specielle formål. Harris giver i [Har78] en oversigt over en lang række af disse.

I Jain [Jai89] er der foreslået et specielt filter, baseret på Wiener filtrering, til implementering i Filtered Backprojection. Filteret benævnes stokastisk filter og indebærer estimation af støjspektret, som dermed også drages ind i rekonstruktionen.

2.4 Forslag til filtertyper

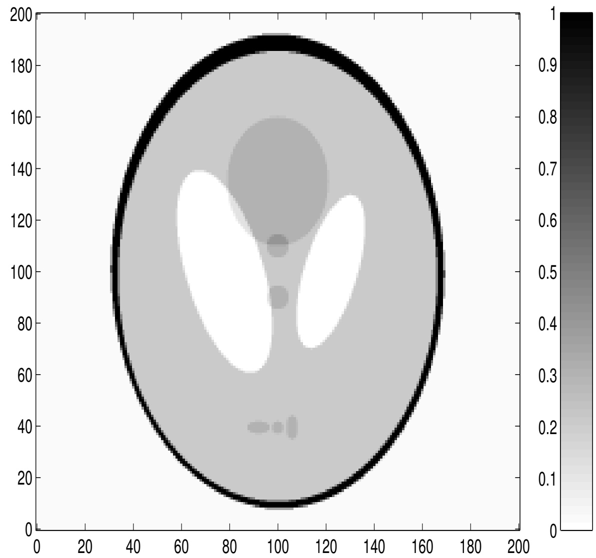
Der er i litteraturen næsten lige så mange forslag til filtrering af sinogrammet, som der er forskere indenfor området. Disse filtreringer er alle mere komplicerede at implementere end de simple filtre. Flere forfattere nævner Wiener filtrering som en mulighed, og der henvises til [Sha94] og [Sun93].

Det er også muligt at benytte en statistisk indgangsvinkel. Kleihorst [Kle94] preprocesserer sinogrammet udfra den antagelse, at det observerede sinogram er dannet ved en Poisson proces. Udfra de observerede data skal Poisson processens parametre estimeres, og sinogrammet kan derefter rekonstrueres.

2.5 Testkørsler

For at vise filtrenes egenskaber overfor Poisson støj benyttes de – i del I – fremstillede testdata. Disse data er ikke normeret efter det originale sinogram, hvilket betyder, at billederne normeres til middelværdi på 0 og varians på 1, før billederne kan analyseres ved de definerede test mål L1 og L2. Der sker også en vurdering ved visuel inspektion, hvor billederne ikke er normeret, for derved at kunne fremvise eventuelle skaleringsfejl. Sinogrammerne er inverteret med Filtered Backprojection, idet alle resultaterne så kan sammenlignes.

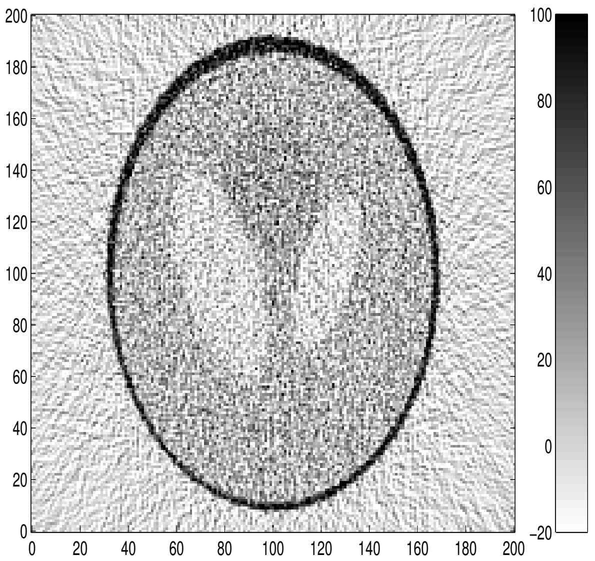
For en beskrivelse af, hvorledes de implementerede filtre kan benyttes, henvises til appendix B. Der er foretaget testkørsler med Shepp-Logan fantomet, som er vist på figur 2.4.



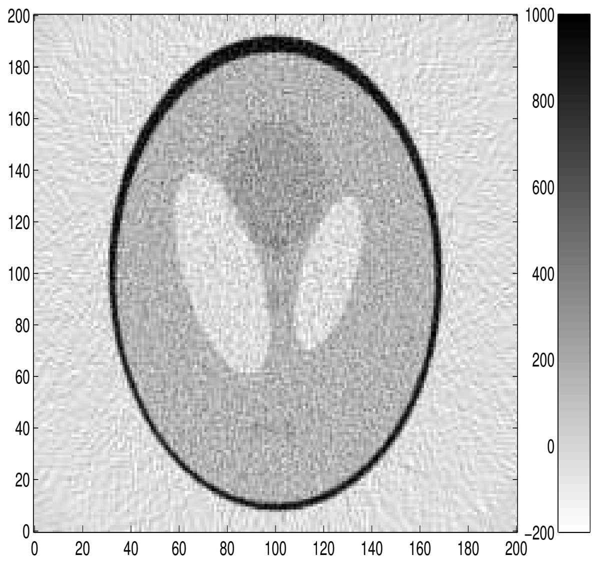
Figur 2.4: Shepp-Logan fantomet.

I de følgende test benyttes to sinogrammer, der svarer til henholdsvis 1 og 10 millioner detektioner. Resultaterne fra den oprindelige rekonstruktion kan ses på figurerne 2.5 og 2.6.

De rekonstruerede billeder fra sinogrammet med 10^6 detektioner er vist med én skala, og de rekonstruerede billeder af sinogrammet med 10^7 detektioner er vist med en anden skala. Der findes negative værdier i de rekonstruerede billeder, hvilket skyldes numeriske artifakter, da sinogrammerne er dannet ved Poisson proces, men fordi der ikke findes negativ aktivitet, kan



Figur 2.5: Rekonstruktion med FB efter 10^6 detektioner.



Figur 2.6: Rekonstruktion med FB efter 10^7 detektioner.

disse fjernes. De er taget med her for at illustrere, at der er forskel i dette støjniveau efter filtrering af sinogrammet.

Rekonstruktion med Filtered Backprojection giver følgende L1 og L2 mål

	L1	L2
10^6 detek.	0.936	0.824
10^7 detek.	0.406	0.357

2.5.1 Resultater efter middelværdi filtrering

På sinogrammerne, der er konstrueret ved en Poisson proces, er der foretaget en middelværdi filtrering med følgende filterkernestørrelser

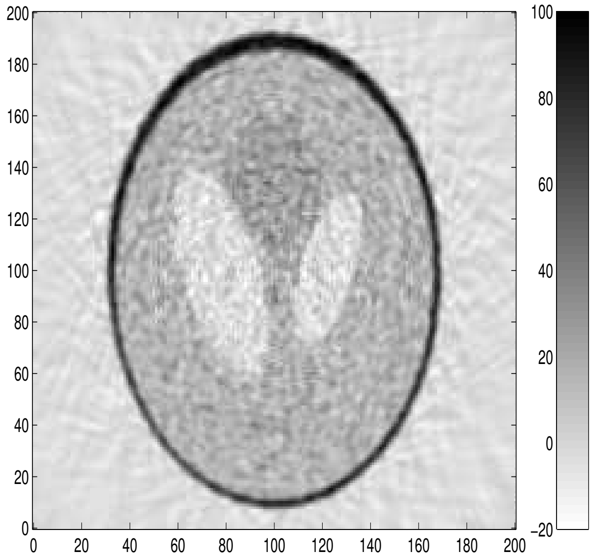
- $F_r \times F_t = 3 \times 3$
- $F_r \times F_t = 5 \times 5$
- $F_r \times F_t = 7 \times 7$
- $F_r \times F_t = 9 \times 9$

Derefter er sinogrammerne inverteret ved brug af Filtered Backprojection. Resultaterne kan ses på figurerne 2.7 til 2.14, hvor filterkernestørrelsen er angivet som $F_r \times F_t$. For sinogrammet med 10^6 detektioner fås følgende L1 og L2 mål efter filtrering og rekonstruktion

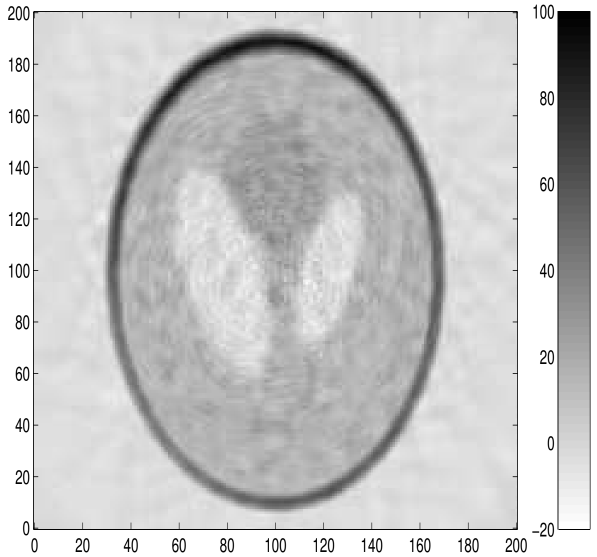
$F_r \times F_t$	L1	L2
3×3	0.385	0.379
5×5	0.378	0.433
7×7	0.464	0.539
9×9	0.562	0.624

For sinogrammet med 10^7 detektioner fås følgende L1 og L2 mål efter fitrering og rekonstruktion

$F_r \times F_t$	L1	L2
3×3	0.219	0.267
5×5	0.324	0.406
7×7	0.448	0.528
9×9	0.556	0.618



Figur 2.7: Sinogrammet med 10^6 detektioner filtreret med et middelværdi filter på 3×3 og inverteret med FB.



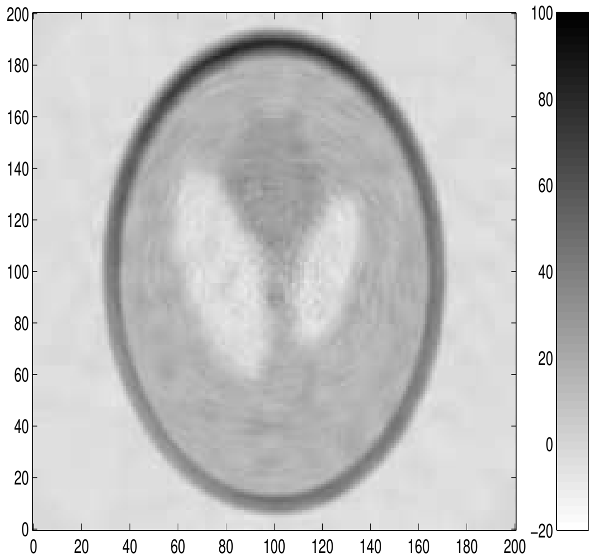
Figur 2.8: Sinogrammet med 10^6 detektioner filtreret med et middelværdi filter på 5×5 og inverteret med FB.

Det kan ses på figur 2.10 og figur 2.14, at en for stor filterkerne betyder, at det inverterede billede bliver defokuseret, hvilket besværliggører en tolkning af resultatet. Det er f.eks. umuligt at se de mindre ellipser. Udfra inspektion af figurerne, og ved at benytte L-målene, fremgår det, at den mindste filterkernestørrelse giver det bedste resultat. Det er altså vigtigt ikke at filtrere med en for stor kernestørrelse, men der skal selvfølgelig tages hensyn til strukturelementernes størrelse og samplingsparametrene for sinogrammet og billedet.

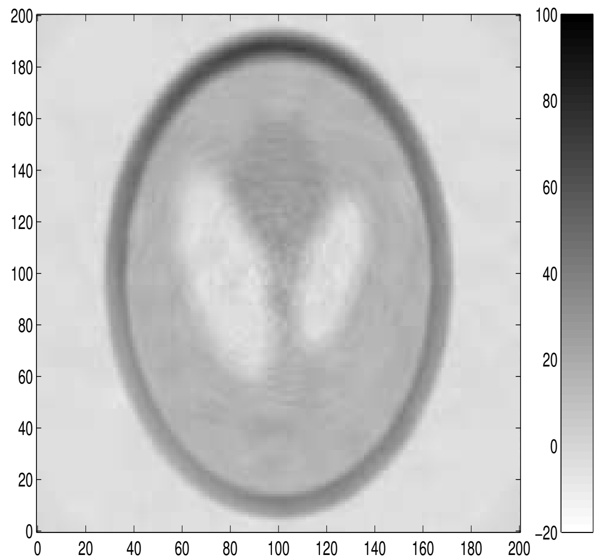
2.5.2 Resultater efter Median filtrering

På sinogrammerne, der er konstrueret ved en Poisson proces, er der foretaget en median filtrering med følgende filterkernestørrelser

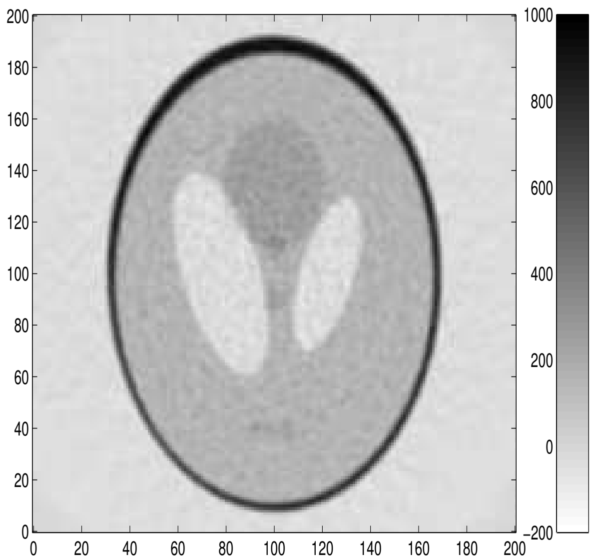
- $F_r \times F_t = 3 \times 3$
- $F_r \times F_t = 5 \times 5$
- $F_r \times F_t = 7 \times 7$
- $F_r \times F_t = 9 \times 9$



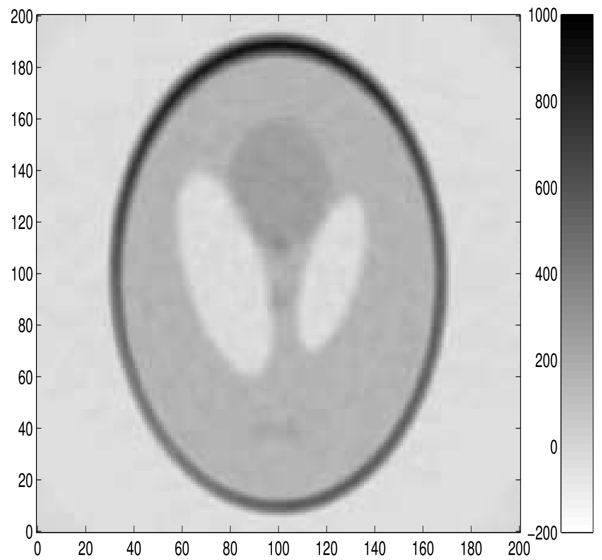
Figur 2.9: Sinogrammet med 10^6 detektioner filtreret med et middelværdi filter på 7×7 og inverteret med FB.



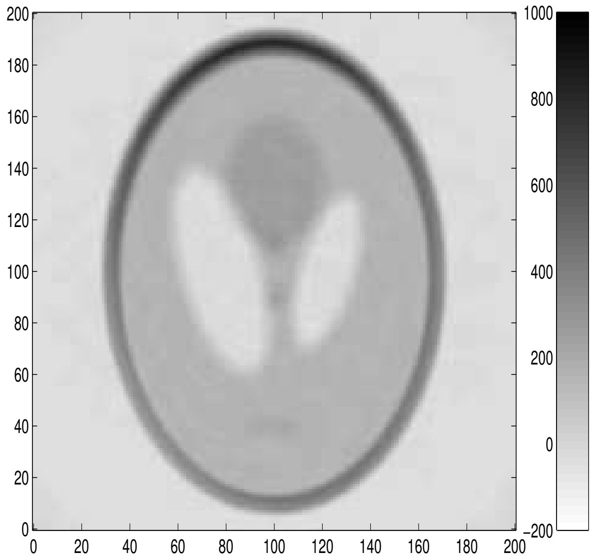
Figur 2.10: Sinogrammet med 10^6 detektioner filtreret med et middelværdi filter på 9×9 og inverteret med FB.



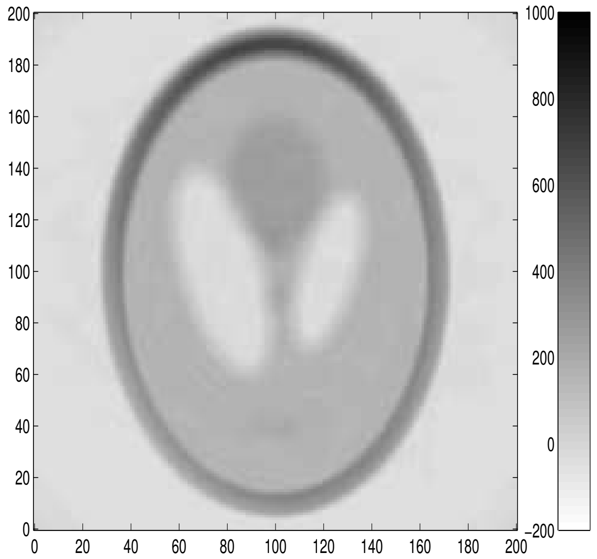
Figur 2.11: Sinogrammet med 10^7 detektioner filtreret med et middelværdi filter på 3×3 og inverteret med FB.



Figur 2.12: Sinogrammet med 10^7 detektioner filtreret med et middelværdi filter på 5×5 og inverteret med FB.



Figur 2.13: Sinogrammet med 10^7 detektioner filtreret med et middelværdi filter på 7×7 og inverteret med FB.



Figur 2.14: Sinogrammet med 10^7 detektioner filtreret med et middelværdi filter på 9×9 og inverteret med FB.

hvor den udvalgte fraktil altid er det midterste element.

Derefter er sinogrammerne inverteret ved brug af Filtered Backprojection. Resultaterne kan ses på figurerne 2.15 til 2.22.

Sinogrammet med 10^6 detektioner giver – efter rekonstruktion – følgende L1 og L2 mål

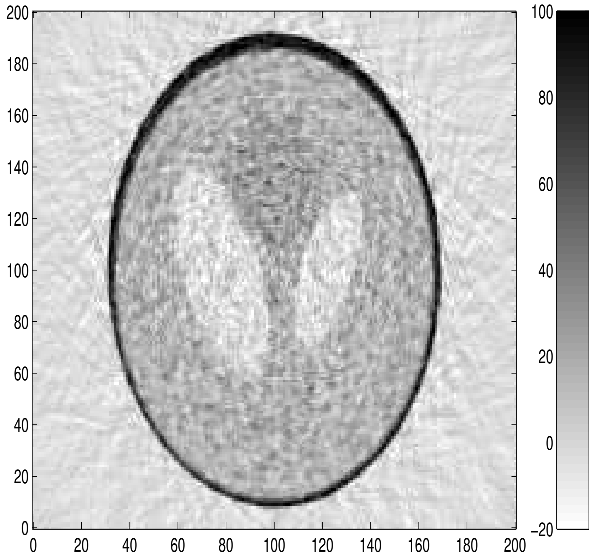
$F_r \times F_t$	L1	L2
3×3	0.440	0.405
5×5	0.332	0.339
7×7	0.321	0.351
9×9	0.339	0.376

For sinogrammet med 10^7 detektioner fås følgende L1 og L2 mål efter filtrering og invertering

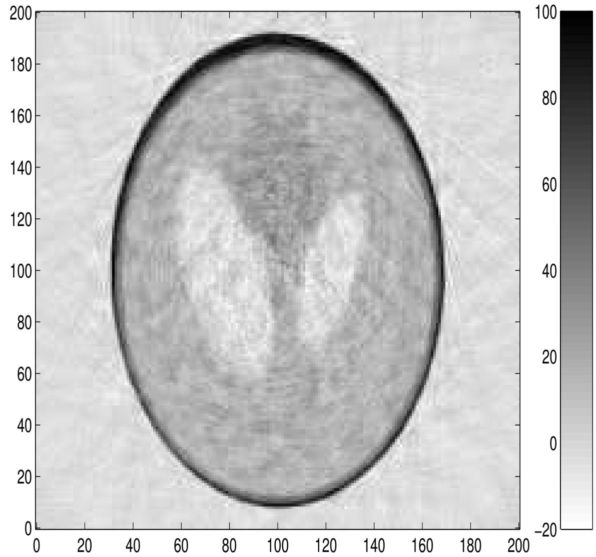
$F_r \times F_t$	L1	L2
3×3	0.206	0.213
5×5	0.217	0.259
7×7	0.250	0.299
9×9	0.283	0.330

Det skal noteres, at ved brug af median filteret fås skarpere kanter, men disse mindskes noget, når de høje værdier, som de hyppigt er repræsenteret ved i sinogrammet, fjernes.

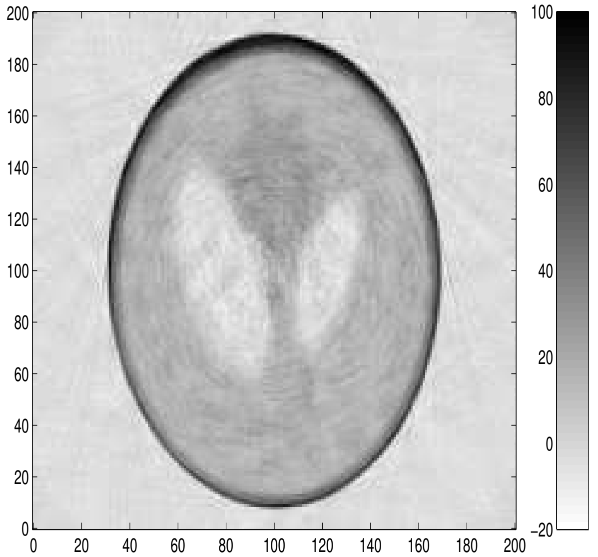
Median filteret giver bedre resultater end middelværdi filteret, men store filterkerner skal undgås.



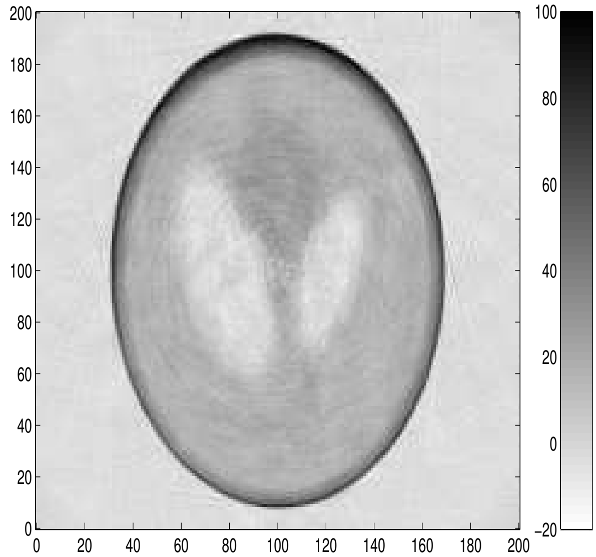
Figur 2.15: Sinogrammet med 10^6 detektioner filtreret med et median filter på 3×3 og inverteret med FB.



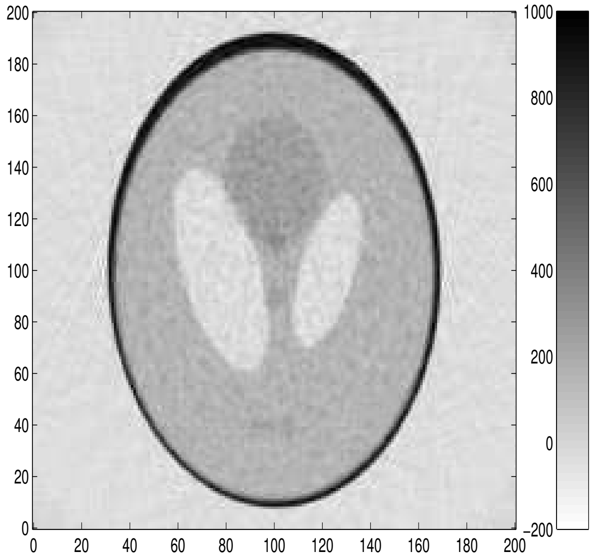
Figur 2.16: Sinogrammet med 10^6 detektioner filtreret med et median filter på 5×5 og inverteret med FB.



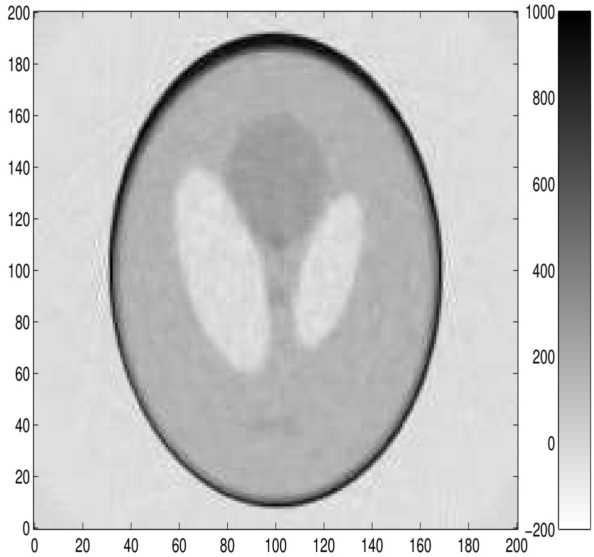
Figur 2.17: Sinogrammet med 10^6 detektioner filtreret med et median filter på 7×7 og inverteret med FB.



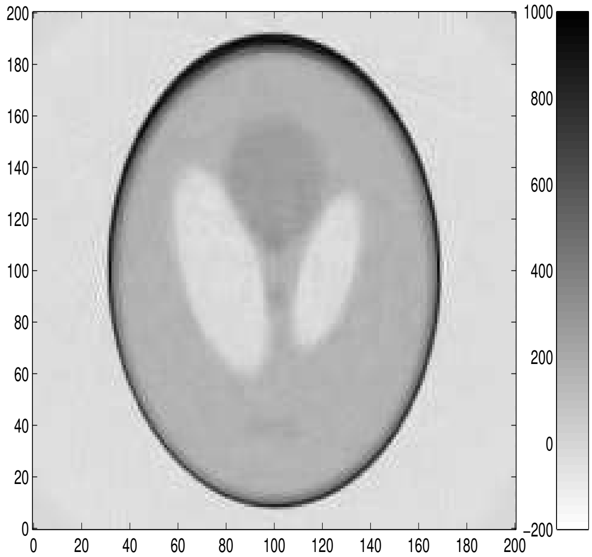
Figur 2.18: Sinogrammet med 10^6 detektioner filtreret med et median filter på 9×9 og inverteret med FB.



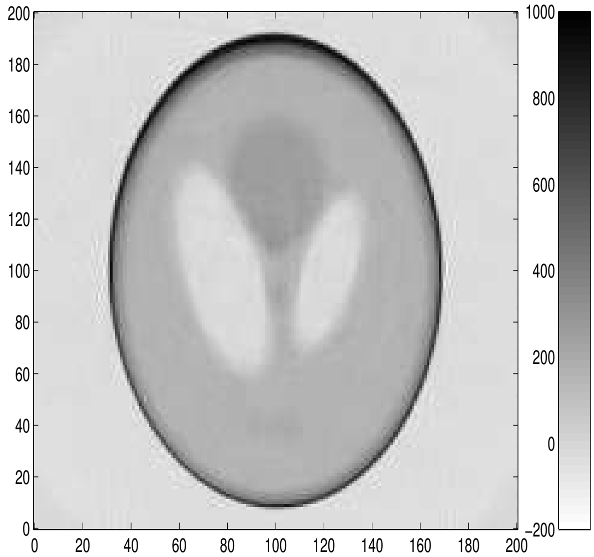
Figur 2.19: Sinogrammet med 10^7 detektioner filtreret med et median filter på 3×3 og inverteret med FB.



Figur 2.20: Sinogrammet med 10^7 detektioner filtreret med et median filter på 5×5 og inverteret med FB.



Figur 2.21: Sinogrammet med 10^7 detektioner filtreret med et median filter på 7×7 og inverteret med FB.



Figur 2.22: Sinogrammet med 10^7 detektioner filtreret med et median filter på 9×9 og inverteret med FB.

2.5.3 Resultater ved brug af vægtfunktioner i Filtered Backprojection

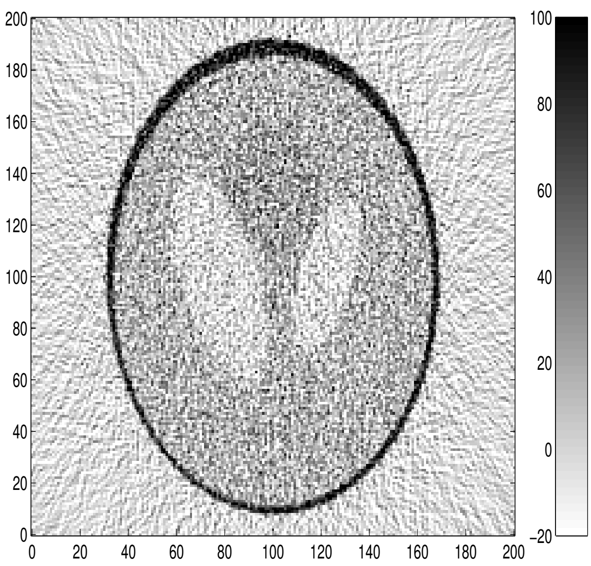
For begge sinogrammer er der udført en invertering med Filtered Backprojection ved brug af de implementerede vægtfunktioner. Resultaterne kan ses på figurerne 2.23 til 2.30.

Ved brug af vægtfunktioner under rekonstruktionen fås, for sinogrammet med 10^6 detektioner, følgende L1 og L2 mål

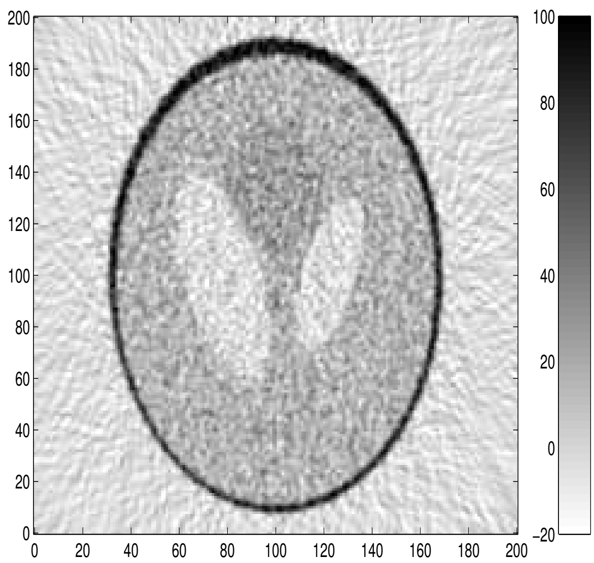
Vægt fkt.	L1	L2
Ingen	0.936	0.824
Hanning	0.514	0.461
Hamming	0.541	0.483
Shepp-Logan	0.590	0.523

For sinogrammet med 10^7 detektioner fås følgende L1 og L2 mål

Vægt fkt.	L1	L2
Ingen	0.406	0.357
Hanning	0.233	0.248
Hamming	0.239	0.247
Shepp-Logan	0.249	0.246



Figur 2.23: Sinogrammet med 10^6 detektioner er filtreret med Ram-Lak filteret.

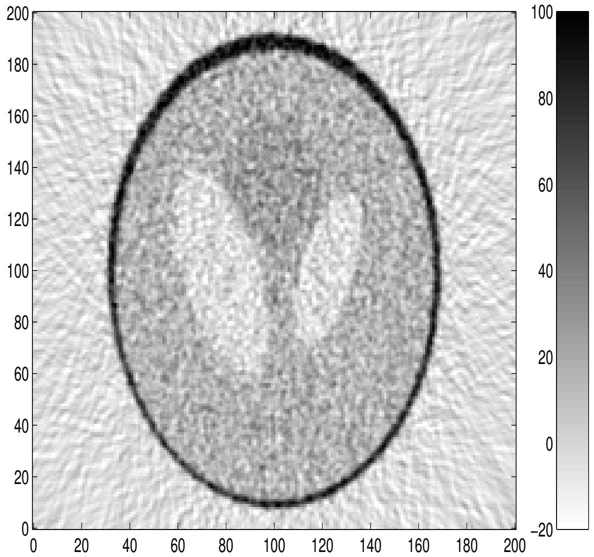


Figur 2.24: Sinogrammet med 10^6 detektioner er filtreret med Hanning filteret.

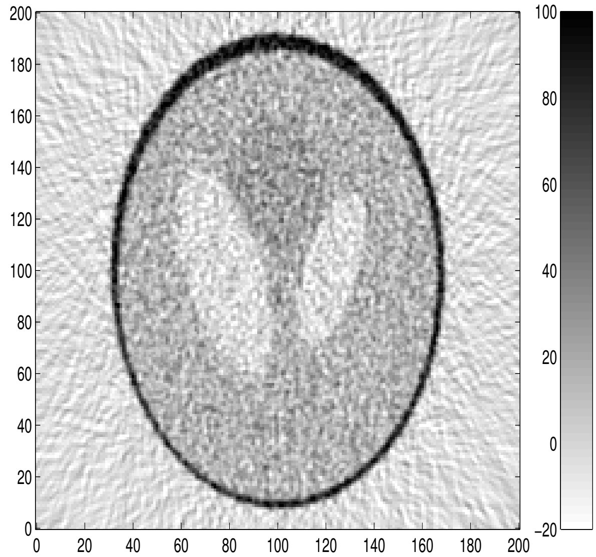
Som det kan ses af disse figurer, er der ikke den store forskel på hvilken vægtfunktion, der er benyttet ved filtreringen. Hanning vægtfunktionen giver dog de bedste L-mål. Det er altså af stor betydning, at der benyttes et filter, da støjen hermed reduceres betydeligt.

2.6 Konklusion

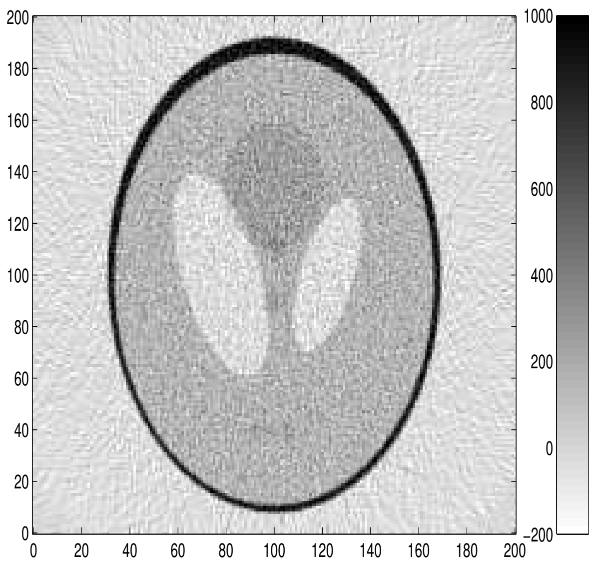
Som det kan ses af de foregående resultater, er det muligt at opnå en forbedring af de rekonstruerede billeder ved at benytte preprocessering. Men denne skal ikke være for omfattende, så



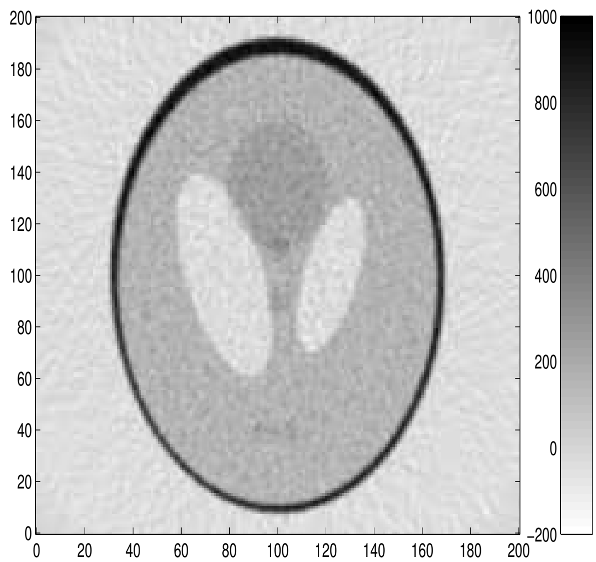
Figur 2.25: Sinogrammet med 10^6 detektioner er filtreret med Hamming filteret.



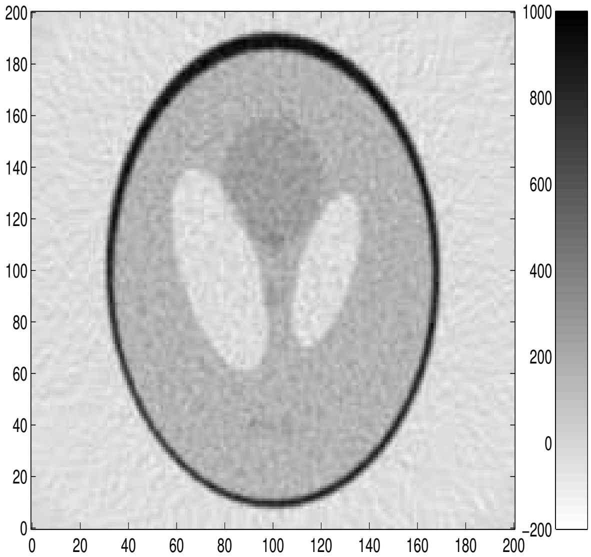
Figur 2.26: Sinogrammet med 10^6 detektioner er filtreret med Shepp-Logan filteret.



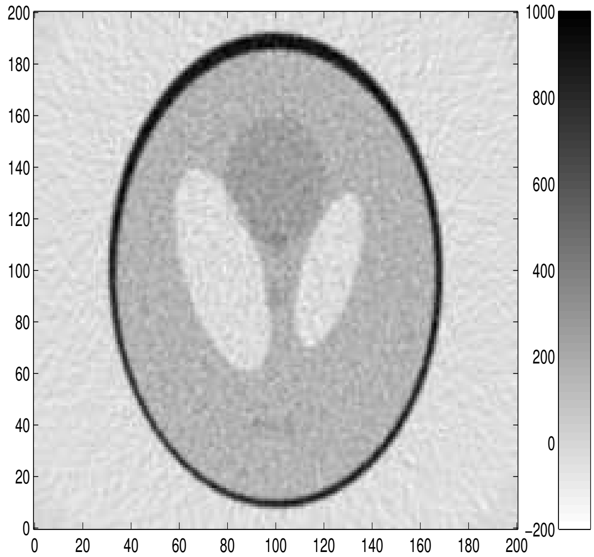
Figur 2.27: Sinogrammet med 10^7 detektioner er filtreret med Ram-Lak filteret.



Figur 2.28: Sinogrammet med 10^7 detektioner er filtreret med Hanning filteret.



Figur 2.29: Sinogrammet med 10^7 detektioner er filtreret med Hamming filteret.



Figur 2.30: Sinogrammet med 10^7 detektioner er filtreret med Shepp-Logan filteret.

går der for meget information tabt. Det, af de afprøvede filtre, der giver det bedste resultat, er median filteret, men da forskellene er små, kræves der en bedre undersøgelse. Det kan dog bemærkes, at en for kraftig filtrering vil give et unødigt informationstab, hvilket vanskeliggører en tolkning af billedet.

Bedre resultater kan eventuelt opnås ved en kombination af medianfilteret med en givet vægtfunktion. Disse forhold er imidlertid ikke undersøgt i denne rapport.

Kapitel 3

Postprocessering af PET billeder

Der vil i dettte kapitel blive gennemgået en model til postprocessering af det rekonstruerede billede. Modellen tager udgangspunkt i en statistisk model af billedet og degenereringen af dette. Der vil ikke blive foretaget almindelig filtrering med lineære filtre, da der ved brug af disse filtre vil ske en udglatning af kanterne i billedet, og da lineær filtrering i de to domæner er snævert koblede. Baggrunden, for opstilling af den statistiske model, beror på en samtidig tolkning af billedet. Der ønskes et billede, som består af lukkede områder, der er lavfrekvente, og hvor der tillades diskontinuiteter ved overgangene mellem disse.

I de følgende kapitler vil det filtrerede billede gå under betegnelsen, det rekonstruerede billede. Dette skyldes, at den valgte processering ikke kun kan benyttes på PET billeder, men er generelt anvendelig til støjfiltrering.

3.1 Valg af model

Udgangspunktet for modellen er en artikel af Geman og Geman [GG84], der sammenkobler filtreringen af billedet med oprettelsen af *kantelementer*. Udgangspunktet for filtreringen er opstillingen af en *Compound Markov Random Field* (CMRF) model for det ønskede billede. Geman og Geman [GG84] foreslog en *simulated annealing* strategi til rekonstruktion af det støjfri billede. De beviste, at der er en sammenhæng mellem Gibbs[1] fordelingen og Markov Random Field modellen.

3.1.1 CMRF modellen

Det observerede billede vil have betegnelsen d i de følgende afsnit og antages at have størrelsen $M \times N$. Hvis der henvises til elementet på plads (m, n), bruges betegnelsen $d_{m,n}$, og det rekonstruerede billede tildeles symbolet V. Der defineres kantelementer, som foreslået i [ZC93]. Der er to typer af kantelementer, horisontale h og vertikale v. Et kantelement er aktivt, når der eksisterer en kant, og tildeles da værdien $+1$. Hvis kantelementet ikke er aktivt, tildeles det værdien -1.

Horisontale kantelementer defineres således, at $h_{m,n}$ indeholder information om, hvorvidt der er en diskontinuitet mellem billedelementerne $V_{m,n}$ og $V_{m+1,n}$. Det tilsvarende vertikale kantelement $v_{m,n}$ indeholder information om kanten mellem billedelementerne $V_{m,n}$ og $V_{m,n+1}$.

[1] se afsnit 3.3

Kantelementerne er placeret således

$V_{1,5}$	$h_{1,5}$	$V_{2,5}$	$h_{2,5}$	$V_{3,5}$	$h_{3,5}$	$V_{4,5}$
$v_{1,4}$		$v_{2,4}$		$v_{3,4}$		$v_{4,4}$
$V_{1,4}$	$h_{1,4}$	$V_{2,4}$	$h_{2,4}$	$V_{3,4}$	$h_{3,4}$	$V_{4,4}$
$v_{1,3}$		$v_{2,3}$		$v_{3,3}$		$v_{4,3}$
$V_{1,3}$	$h_{1,3}$	$V_{2,3}$	$h_{2,3}$	$V_{3,3}$	$h_{3,3}$	$V_{4,3}$
$v_{1,2}$		$v_{2,2}$		$v_{3,2}$		$v_{4,2}$
$V_{1,2}$	$h_{1,2}$	$V_{2,2}$	$h_{2,2}$	$V_{3,2}$	$h_{3,2}$	$V_{4,2}$
$v_{1,1}$		$v_{2,1}$		$v_{3,1}$		$v_{4,1}$
$V_{1,1}$	$h_{1,1}$	$V_{2,1}$	$h_{2,1}$	$V_{3,1}$	$h_{3,1}$	$V_{4,1}$

for et billede af størrelsen 4×5. Der vil i det følgende blive brugt Θ som fællesbetegnelse for modellens parametre, som vil blive specificeret.

Da modellen for billedet kun indebærer brugen af kortrækkende naborelationer, kan modellen beskrives som en Markov-Random-Field model [ZC93].

3.2 Bayes sætning

Bayes sætning udtrykker, at det er muligt at beskrive fordelingen $P(V|d)$ for det rekonstruerede billede V, betinget det observerede billede d – kaldet *posterior*, på følgende måde

$$P(V|d) = \frac{P(d|V)P(V)}{P(d)} \tag{3.1}$$

hvor $P(d)$ er fordelingen for det observerede billede, og $P(V)$ er fordelingen for det rekonstruede billede V, kaldet *prior*. Fordelingen $P(d|V)$ er degenerationsprocessen for billedet.

Det søgte er estimatet for det rekonstrurede billede, der maksimerer formel (3.1). Estimatet kaldes *Maximum A Posterior*, MAP.

Bayes sætning, skrevet op for den aktuelle model, vil få følgende form

$$P(V, h, v|d, \Theta) = \frac{P(d|V, h, v, \Theta)P(V, h, v|\Theta)}{P(d|\Theta)}. \tag{3.2}$$

De følgende afsnit vil beskrive modellerne for prior og degenerationsprocessen.

3.3 Model af det ønskede billede, prior

Modellen for prior, der vil blive benyttet, er en CMRF, som tilhører klassen af Gibbs fordelinger.

Gibbs fordelingen har følgende form

$$P(x) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{E(x)}{T}\right) \tag{3.3}$$

hvor Z er normaliseringskonstanten, $E(x)$ er en kostfunktion, der er nedadtil begrænset, og T er en parameter. Fordelingen $P(x)$ har maksimum, hvor kostfunktionen har sit globale minimum. Modellen vil blive beskrevet som en Gibbs fordeling ved at fastlægge en kostfunktion.

Modellen er opstillet med udgangspunkt i Chen [Che94] og Zerubia [ZC93]. I den første simple model vil de enkelte kantelementer være indbyrdes uafhængige og kun bestemt af billedets intensitet.

3.3.1 Model med uafhængige kantelementer

Modellen er opbygget som en Gibbs fordeling, og prior, for det rekonstruerede billede og kantelementerne, vil have følgende form

$$P(V,h,v) = Z_1^{-1} \exp\left(-E_{\text{prior}}(V,h,v)\right) \tag{3.4}$$

hvor Z_1 er normaliseringskonstanten, og $E_{prior}(V,h,v)$ er kostfunktionen, der ser således ud

$$\begin{aligned} E_{\text{prior}}(V,h,v) &= \frac{\nu}{2}\sum_{m,n}\left[(1-h_{m,n})(V_{m,n}-V_{m+1,n})^2 + (1-v_{m,n})(V_{m,n}-V_{m,n+1})^2\right] \\ &+ \sum_{m,n}\mu^h h_{m,n} + \sum_{m,n}\mu^v v_{m,n}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Begrundelsen for kostfunktionens opbygning er som følgende skitseret:

Da der er symmetri, vil der kun blive set på horisontale kantelementer og deres bidrag til kostfunktionen. De samme argumenter vil kunne bruges for de vertikale kantelementer.

Hvor der er et ikke aktivt kantelement (-1), vil en forskel i billedpunkternes værdi give et bidrag til kostfunktionen. For elementerne $V_{m,n}$ og $V_{m+1,n}$ vil bidraget være $v(V_{m,n}-V_{m+1,n})^2$, hvor v er en model parameter. Hvis der er et aktivt kantelement (+1), vil der ikke komme et bidrag fra pixel intensitetsforskellen. For at det ikke skal være favorabelt, at placere kantelementer mellem alle billedpunkter, tilføjes to ekstra led til kostfunktionen. Dette bidrag vil være på μ^h, hvis der er et aktivt horisontalt kantelement.

De to mulige bidrag til kostfunktionen, hvor kantelementet $h_{m,n}$ har indflydelse, er for aktivt kantelement (+1)

$$\Delta E_{prior}(V,h,v|h_{m,n}=1) = \mu^h \tag{3.6}$$

og når kantelementet ikke er aktivt (-1)

$$\Delta E_{prior}(V,h,v|h_{m,n}=-1) = v(V_{m,n}-V_{m+1,n})^2 - \mu^h. \tag{3.7}$$

Når man ønsker den laveste energi, er det favorabelt med et kantelement hvis

$$\mu^h \leq v(V_{m,n}-V_{m+1,n})^2 - \mu^h, \tag{3.8}$$

hvilket betyder, at en kant $K = |V_{m,n}-V_{m+1,n}|$ er ønskværdig hvis

$$K \geq \sqrt{\frac{2\mu^h}{v}}. \tag{3.9}$$

Tilsvarende betragtninger gør sig gældende for de vertikale kanter. Som det fremgår, er der ikke afhængighed mellem de enkelte kanter, hvilket imidlertid ikke er gavnligt, da det er sammenhængende kanter, der ønskes. Derfor udvides modellen som foreslået i [Che94].

3.3.2 Prior med lokale kantelementer

Der tilføjes nu et ekstra led til formel (3.5), hvorved kostfunktionen vil få følgende udseende

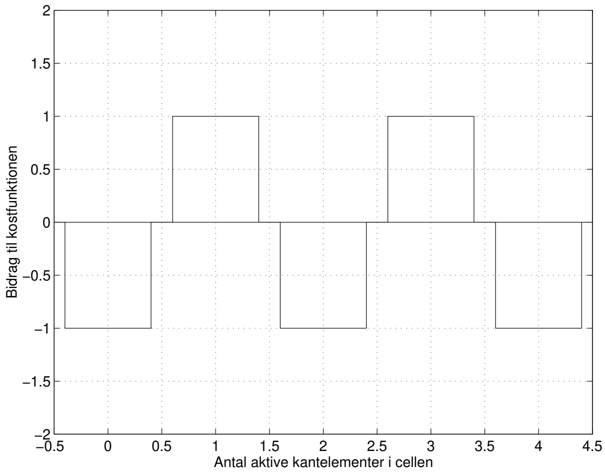
$$\begin{aligned} E_{\text{prior}}(V,h,v) &= \frac{\nu}{2}\sum_{m,n}\left[(1-h_{m,n})(V_{m,n}-V_{m+1,n})^2 + (1-v_{m,n})(V_{m,n}-V_{m,n+1})^2\right] \\ &+ \sum_{m,n}\mu^h h_{m,n} + \sum_{m,n}\mu^v v_{m,n} - \gamma\sum_{m,n} h_{m,n}h_{m,n+1}v_{m,n}v_{m+1,n} \end{aligned} \tag{3.10}$$

hvor v, μ^h, μ^v og γ alle er positive.

Det ekstra bidrag til kostfunktionen kan være på $+\gamma$ eller $-\gamma$. Dette led er fremkommet ved at se på en celle i billedet bestående af 4 nabo-billedelementer og de tilhørende 4 kantelementer

$$\begin{array}{ccc} V_{m,n+1} & h_{m,n+1} & V_{m+1,n+1} \\ v_{m,n} & & v_{m+1,n} \\ V_{m,n} & h_{m,n} & V_{m+1,n} \end{array}$$

Det ekstra bidrag til kostfunktionen, som funktion af antallet af aktive kantelementer i cellen, kan ses på figur 3.1.

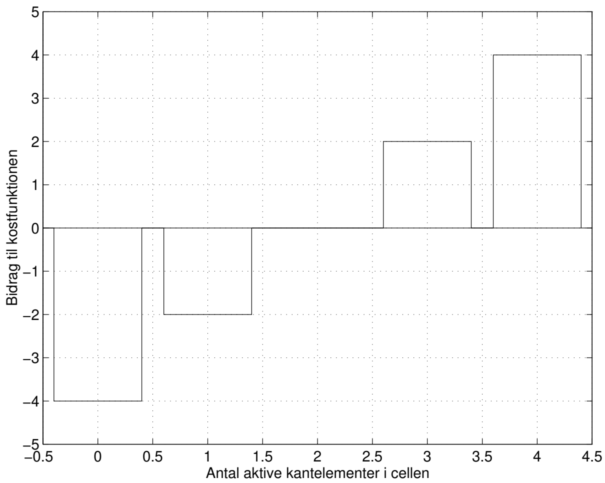


Figur 3.1: Bidrag til kostfunktionen fra det ekstra led, $\gamma = 1$.

Som det ses af figur 3.1, vil det være favorabelt med et lige antal kanter i cellen: 0, 2 eller 4. Dette fordrer til hele kantlinier forstået således, at der ikke påbegyndes en kant eller sker en opspaltning af kantlinien i cellen.

Parameteren γ kan ikke vælges uafhængigt af μ^h og μ^v. For at fremme overskueligheden i den følgende gennemgang sættes $\mu = \mu^h = \mu^v$.

Det bidrag til kostfunktionen, der skyldes μ, for at aktivere kantelementerne i cellen, kan ses på figur 3.2 som funktion af det samlede antal aktive kantelementer.

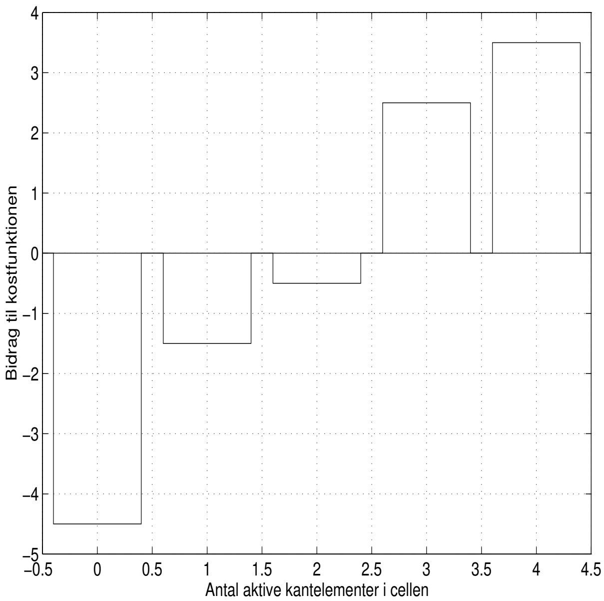


Figur 3.2: Bidrag til kostfunktionen fra aktive kanter i cellen, $\mu = 1$.

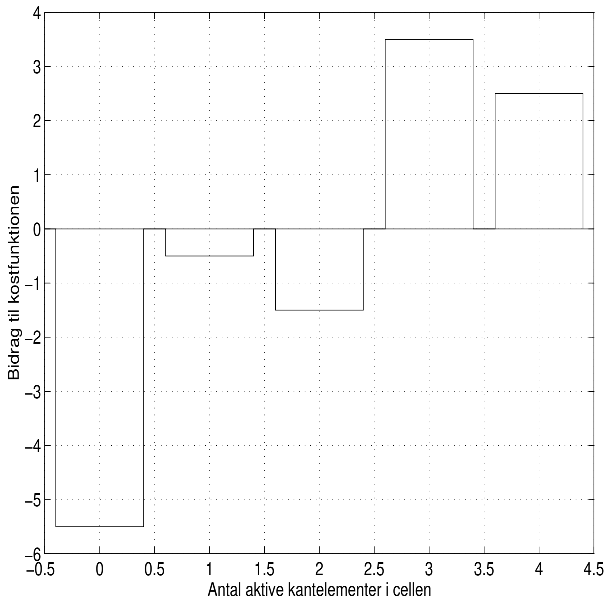
For at det, ved et eller tre aktive kantelementer, ikke skal kunne betale sig at aktivere endnu et kantelement, uden hensyntagen til de respektive billedværdier, skal der gælde

$$\gamma \leq \mu \tag{3.11}$$

hvilket er illustreret på figurerne 3.4 og 3.3.



Figur 3.3: Samlet bidrag med $\gamma \leq \mu$, $\mu = 1$ og $\gamma = 0.5$.



Figur 3.4: Samlet bidrag med $\gamma \geq \mu$, $\mu = 1$ og $\gamma = 1.5$.

Da hvert kantelement tilhører to celler, kan der ikke opstilles en simpel sammenhæng mellem ønsket om at aktivere et kantelement og de tilhørende billedelementers værdier. Påvirkningen fra de 6 nabokantelementer betyder, at der er tre muligheder for påvirkning.

1. Begge naboceller fordrer aktiv kant.
2. Nabocellerne fordrer aktiv hhv. ikke aktiv kant.
3. Begge naboceller fordrer ikke aktiv kant.

Betinget af at $h_{m,n}$ er aktivt, vil bidraget for kantelementet $h_{m,n}$ til kostfunktionen være

$$\Delta E_{prior}(V, h, v | h_{m,n} = 1) = \mu^h - \gamma \left[h_{m,n+1} v_{m,n} v_{m+1,n} + h_{m,n-1} v_{m,n-1} v_{m+1,n-1} \right]. \tag{3.12}$$

Tilsvarende vil bidraget for et ikke aktivt kantelement være

$$\begin{aligned} \Delta E_{prior}(V, h, v | h_{m,n} = -1) &= v(V_{m,n} - V_{m+1,n})^2 - \mu^h \\ &+ \gamma \left[\, h_{m,n+1} v_{m,n} v_{m+1,n} + h_{m,n-1} v_{m,n-1} v_{m+1,n-1} \right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

For at lette overskueligheden vil $\Gamma^h_{m,n} = h_{m,n+1} v_{m,n} v_{m+1,n} + h_{m,n-1} v_{m,n-1} v_{m+1,n-1}$ blive benyttet, hvilket giver

$$\Delta E_{prior}(V, h, v | h_{m,n} = 1) = \mu^h - \gamma \, \Gamma^h_{m,n} \tag{3.14}$$

og

$$\Delta E_{prior}(V,h,v|h_{m,n}=-1) = v(V_{m,n}-V_{m+1,n})^2 - \mu^h + \gamma\Gamma^h_{m,n}. \tag{3.15}$$

Da nabokantelementerne kan antage værdierne +1 og -1, vil der gælde følgende

$$\Gamma^h_{m,n} = \begin{cases} +2 & \text{, hvis begge naboceller fordrer aktiv kant.} \\ 0 & \text{, hvis nabocellerne fordrer aktiv hhv. ikke aktiv kant.} \\ -2 & \text{, hvis begge naboceller fordrer ikke aktiv kant.} \end{cases} \tag{3.16}$$

Hvis det ønskes, at en forskel i billedelementernes værdi er på $K = |V_{m,n} - V_{m+1,n}|$, før en kant skal aktiveres, gælder

$$\begin{aligned} \Delta E_{prior}(V,h,v|h_{m,n}=1) &\leq \Delta E_{prior}(V,h,v|h_{m,n}=-1) &(3.17)\\ \mu^h - \gamma\,\Gamma^h_{m,n} &\leq vK^2 - \mu^h + \gamma\,\Gamma^h_{m,n} &(3.18)\\ K^2 &\geq \frac{2}{v}\left[\mu^h - \gamma\Gamma^h_{m,n}\right]. &(3.19) \end{aligned}$$

Da $\Gamma^h_{m,n}$ kan antage 3 værdier, giver det 3 muligheder for K

$$\begin{array}{lcll} \Gamma^h_{m,n} = 2 & : & K^- = & \sqrt{\frac{2\mu^h}{v}\left[1 - 2\frac{\gamma}{\mu^h}\right]} \\ \Gamma^h_{m,n} = 0 & : & K^0 = & \sqrt{\frac{2\mu^h}{v}} \\ \Gamma^h_{m,n} = -2 & : & K^+ = & \sqrt{\frac{2\mu^h}{v}\left[1 + 2\frac{\gamma}{\mu^h}\right]}. \end{array} \tag{3.20}$$

Idet kanterne skal være sammenhængende, vil K^- være at foretrække. De to andre K-værdier repræsenterer en mulighed for uønsket aktivering af kantelementer.

Hvis der ikke skal opstå uønskede kanter, skal der gælde

$$1 - 2\frac{\gamma}{\mu^h} \geq 0, \tag{3.21}$$

hvilket giver

$$\gamma \leq \frac{\mu^h}{2}. \tag{3.22}$$

Ved definition af $\Gamma^v_{m,n} = v_{m+1,n}h_{m,n}h_{m,n+1} + v_{m-1,n}h_{m-1,n}h_{m-1,n+1}$ kan tilsvarende argumenter benyttes for vertikale kantelementer.

3.3.3 Stedafhængige vægtparametre for kantelementerne

Modellen, i formel (3.10), for prior garanterer ikke, at der skabes hele lukkede områder [JHP91]. For at kompensere for dette foreslår Geiger [GG91], at lade parametrene μ^h og μ^v i formel (3.5) være stedafhængige.

Ved at gøre parametrene μ^h og μ^v stedafhængige vil modellen i formel (3.5) få følgende form

$$\begin{aligned} E_{\text{prior}}(V,h,v) &= \frac{\nu}{2}\sum_{m,n}\left[(1-h_{m,n})(V_{m,n}-V_{m+1,n})^2 + (1-v_{m,n})(V_{m,n}-V_{m,n+1})^2\right] \\ &+ \sum_{m,n}\mu^h_{m,n}h_{m,n} + \sum_{m,n}\mu^v_{m,n}v_{m,n}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Stedafhængigheden af μ^h og μ^v skal bestemmes, inden kostfunktionen minimeres. Her vil kun komme en kort beskrivelse af fremgangsmåden og iøvrigt henvises til appendix A, som er en indleveret artikel til konferencen Neural Networks in Signal Processing (NNSP).

For at sikre lukkede områder i billedet er der af Storvik [Sto94] og Cohen og Cohen [CC93] foreslået brug af *snakes*. En snake består af et antal punkter i planet, der forbindes med rette linier. Disse punkter er gentaget cyklisk for at sikre en sammenhængende kurve i planet.

Denne kurve kan bruges som en prior for, hvor der skal ligge kanter i billedet. Snaken forbindes med kanterne i billedet ved at danne et gradient energilandskab for billedet.

Energilandskabet dannes ved brug af normale kantdetektions algoritmer efterfulgt af en filtrering med et passende Gauss-filter, hvis udbreddelsesområde blandt andet afhænger af støjniveauet i det observerede billede.

Placeringen af snake elementerne *snaxels* sker på følgende måde:

Udfra et, af brugeren fastlagt, startgæt om, hvor den lukkede kurve ligger, flyttes de enkelte punkter i snaken mod toppen af gradient energilandskabet. Dog med den begrænsning at punktet kun flyttes en vis brøkdel imod gradienten, hvis der ikke dermed sker en for stor udvidelse af det af snaken omsluttede areal.

Udfra energilandskabet og det fastlagte startgæt findes den optimale placering af snaken ved benyttelse af gradient opstigning i energilandskabet (se nærmere beskrivelse i appendix A).

Udfra den/de bestemte snake(s) kan stedafhængigheden for parametrene $\mu^h_{m,n}$ og $\mu^v_{m,n}$ fastlægges ved at tildele en lav værdi for μ^h og μ^v i de områder, hvor snaken befinder sig. I de resterende områder skal μ^h og μ^v tildeles en passende høj værdi, så uønskede kanter ikke opstår.

3.4 Model af degenerationsprocessen

Degenerationen af billedet sker ved addition af støj. Det vil – som første tilnærmelse – være hvid støj

$$d_{m,n} = V_{m,n} + n, \qquad (m,n) \in [1;M] \times [1;N] \tag{3.24}$$

hvor n er Gaussisk hvid støj med middelværdi 0 og en varians på σ^2. Af formel (3.24) fås

$$P(d_{m,n}|V_{m,n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \exp(-\frac{(d_{m,n} - V_{m,n})^2}{2\sigma^2}) \tag{3.25}$$

der gælder for hvert enkelt pixel. Da disse er uafhængige, og da støjgenereringen er uafhængig af kanternes placering, fås

$$\begin{aligned} P(d|V,h,v,\Theta) &= P(d|V) &(3.26)\\ &= Z_2^{-1}\exp(-\sum_{m,n}\frac{(d_{m,n}-V_{m,n})^2}{2\sigma^2}) &(3.27)\end{aligned}$$

hvor $Z_2 = \sqrt[MN]{2\pi\sigma^2}$ er normaliseringskonstanten.

Der kan nu opstilles en samlet model for $P(V,h,v|d,\Theta)$.

3.5 Model for det rekonstruerede billede

Ved at benytte Bayes formel (3.1), kan posterior for det rekonstruerede billede opskrives

$$P(V,h,v|d,\Theta) = Z^{-1}\exp(-E(V,h,v,d)) \tag{3.28}$$

hvor Z er normaliseringskonstanten, og kostfunktionen er givet ved

$$E(V, h, v, d) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{m,n} (V_{m,n} - d_{m,n})^2 + E_{\text{prior}}(V, h, v). \tag{3.29}$$

Det skal bemærkes, at den samlede model for det rekonstruerede billede er en Gibbs fordeling, for hvilken der kan benyttes *simulated annealing* til at bestemme minimum for kostfunktionen [GG84].

3.6 Resumé

Der er i dette kapitel opstillet en model for posterior for det rekonstruerede billede baseret på en Compound Markov Random Field model. Der er opstillet tre modeller for prior for billedet, og desuden er der opstillet en simpel model for degenerationsprocessen for billedet, under antagelse af at denne er additiv Gausisk hvid støj.

Kapitel 4

Opdatering af model – Mean Field Annealing

Posterior fordelingen – formel (3.28) – er en CMRF. Det betyder, at en simulated annealing strategi, som foreslået af Geman og Geman [GG84], kan benyttes. Der indføres en temperatur T i Gibbs fordelingen

$$P(V, h, v|d, \Theta) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{E(V, h, v, d)}{T}\right) \tag{4.1}$$

hvor Z er normaliseringskonstanten, og kostfunktionen er givet ved formel (3.29).

Simulated annealing strategien bruger en sekvens af faldende temperaturer, som foreslået af [GG84], og garanterer dermed, at det globale minimum for kostfunktionen findes. Da simulated annealing algoritmen er meget beregningstung, er i stedet implementeret en Mean Field Approksimation, som foreslået af Blake [Bla89]. En nærmere beskrivelse findes i [Hay94] eller [JHP91].

4.1 Valg af annealing strategi for temperaturen

For at simulated annealing skal garantere, at det endelige estimat for posterior er det globale maksimum, skal der i følge [GG84], og hvor k er iterationsnummeret, gælde

$$T(k) \geq \frac{c}{\log(1+k)} \qquad \text{for alle k} \tag{4.2}$$

hvor $T(k)$ er faldende for stigende k, og c er en konstant, der er uafhængig af k.

Der er implementeret en lineær nedstigning i den inverse temperatur $\beta = 1/T$. Når der foretages N iterationer fås

$$\beta(k) = \beta_{start} + (\beta_{stop} - \beta_{start})\frac{k-1}{N-1} \tag{4.3}$$

hvor $k = 1, 2, \ldots, N$. Det er muligt at opfylde formel (4.2), når der itereres over et begrænset antal værdier, hvis $\beta_{start} \leq \log(2)/c$ og $\beta_{stop} \leq \log(N+1)/c$.

4.2 Opdateringsformler

Der vil i dette afsnit blive vist formler til opdatering af det rekonstruerede billede og til billedets kantelementer. Inden opdateringsformlerne belyses, skal det bemærkes, at parameteren v er sat til værdien 1. Det skyldes, at ved valg af parametrene i modellen er der en frihedsgrad for meget.

4.2.1 Opdatering af billedelementerne

Opdateringen af billedelementerne kan ske ved at fastholde kantelementerne og minimere kostfunktionen. For kostfunktionens minimum, tilhørende billedelementet $V_{m,n}$, gælder $\frac{\partial E(V,h,v,d)}{\partial V_{m,n}} = 0$. Heraf fås

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(V,h,v,d)}{\partial V_{m,n}} &= -w(d_{m,n} - V_{m,n}) \\ &+ (1-h_{m,n})(V_{m,n} - V_{m+1,n}) - (1-h_{m-1,n})(V_{m-1,n} - V_{m,n}) \\ &+ (1-v_{m,n})(V_{m,n} - V_{m,n+1}) - (1-v_{m,n-1})(V_{m,n-1} - V_{m,n}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

hvor $w = 1/\sigma^2$. Ved at isolere $V_{m,n}$ i formel (4.4) fås

$$\begin{aligned} V_{m,n} &= \frac{1}{\kappa}[\, wd_{m,n} + (1-h_{m,n})V_{m+1,n} \\ &\quad +(1-h_{m-1,n})V_{m-1,n} + (1-v_{m,n})V_{m,n+1} + (1-v_{m,n-1})V_{m,n-1}] \end{aligned} \tag{4.5}$$

hvor $\kappa = w + 4 - h_{m,n} - h_{m-1,n} - v_{m,n} - v_{m,n-1}$. Dette kan udnyttes til at give følgende iterative formel

$$\begin{aligned} V_{m,n}^{k+1} &= \frac{1}{\kappa}\Big[\, wd_{m,n} + (1-h_{m,n})V_{m+1,n}^k + (1-h_{m-1,n})V_{m-1,n}^k \\ &\quad +(1-v_{m,n})V_{m,n+1}^k + (1-v_{m,n-1})V_{m,n-1}^k\Big]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2.2 Andre opdateringsformler

Der er i iterationsformel (4.6) ikke en direkte sammenhæng mellem to – på hinanden følgende – værdier i billedelementet $V_{m,n}$. For at gøre opdateringen mere stabil kan der laves en omskrivning af formel (4.4), som foreslået i [ZC93]. Efter omskrivning ser opdateringsformlen ud på følgende måde

$$\begin{aligned} V_{m,n}^{k+1} &= d_{m,n} - \frac{1}{w}\Big[(1-h_{m,n})(V_{m,n}^k - V_{m+1,n}^k) - (1-h_{m-1,n})(V_{m-1,n}^k - V_{m,n}^k) \\ &+ (1-v_{m,n})(V_{m,n}^k - V_{m,n+1}^k) - (1-v_{m,n-1})(V_{m,n-1}^k - V_{m,n}^k)\Big]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

En tilsvarende opdateringsformel er opstillet af [GG91]. Disse opdateringsalgoritmer er dog ikke implementeret.

4.2.3 Opdatering af kantelementerne

Til opdatering af kantelementerne benyttes Mean Field Approksimation [GG91]. Som udgangspunkt beregnes middelværdien for kantelementerne. Den følgende udledningen vil ske for kantelementet $h_{m,n}$, men vil af symmetriske grunde være tilsvarende for de vertikale kantelementer. Da kantelementet $h_{m,n}$ kun kan antage værdierne +1 og -1, fås følgende middelværdi

$$< h_{m,n} >= (+1) \cdot P(V, h, v | h_{m,n} = 1) + (-1) \cdot P(V, h, v | h_{m,n} = -1). \tag{4.8}$$

Sandsynlighederne bestemmes af formel (4.1) med indsættelse af formel (3.12) og formel (3.13). Da summen af sandsynlighederne skal være 1, fås

$$< h_{m,n} >= \tanh\left[\beta\left(\frac{1}{2}(V_{m,n} - V_{m+1,n})^2 - \mu_h - \gamma\,\Gamma^h_{m,n}\right)\right] \tag{4.9}$$

hvor $\Gamma^h_{m,n} = h_{m,n+1}v_{m,n}v_{m+1,n} + h_{m,n-1}v_{m,n-1}v_{m+1,n-1}$.

Mean Field approksimationen fås ved, i formel (4.9), at erstatte $\Gamma^h_{m,n}$ med $< \Gamma^h_{m,n} >$

$$< h_{m,n} >= \tanh\left[\beta\left(\frac{1}{2}(V_{m,n} - V_{m+1,n})^2 - \mu_h - \gamma < \Gamma^h_{m,n} >\right)\right]. \tag{4.10}$$

Opdateringsformlen for $h_{m,n}$ bliver således

$$h^{k+1}_{m,n} = \tanh\left[\beta\left(\frac{1}{2}(V^k_{m,n} - V^k_{m+1,n})^2 - \mu_h - \gamma\,\Gamma^h_{m,n}(k)\right)\right] \tag{4.11}$$

hvor $\Gamma^h_{m,n}(k) = h^k_{m,n+1}v^k_{m,n}v^k_{m+1,n} + h^k_{m,n-1}v^k_{m,n-1}v^k_{m+1,n-1}$.

Da udledningerne for de vertikale kantelementer er tilsvarende de overstående, fås følgende opdateringsformel for $v_{m,n}$

$$v^{k+1}_{m,n} = \tanh\left[\beta\left(\frac{1}{2}(V^k_{m,n} - V^k_{m,n+1})^2 - \mu_h - \gamma\,\Gamma^v_{m,n}(k)\right)\right] \tag{4.12}$$

hvor $\Gamma^v_{m,n}(k) = v^k_{m+1,n}h^k_{m,n}h^k_{m,n+1} + v^k_{m-1,n}h^k_{m-1,n}h^k_{m-1,n+1}$

Hvis der foretages uendelig mange iterationer, $\beta \to \infty$, vil $\tanh(\cdot)$ returnere +1 eller -1. Dette betyder, at aktiveringen af et kantelement er bestemt af formlerne (3.20).

4.3 Resumé

Der er udledt iterative opdateringsformler til bestemmelse af minimum for den, i kapitel 3, opstillede kostfunktion. Disse formler er udledt ved brug af Mean Field approksimation af den, af [GG84], foreslåede simulated annealing.

Kapitel 5

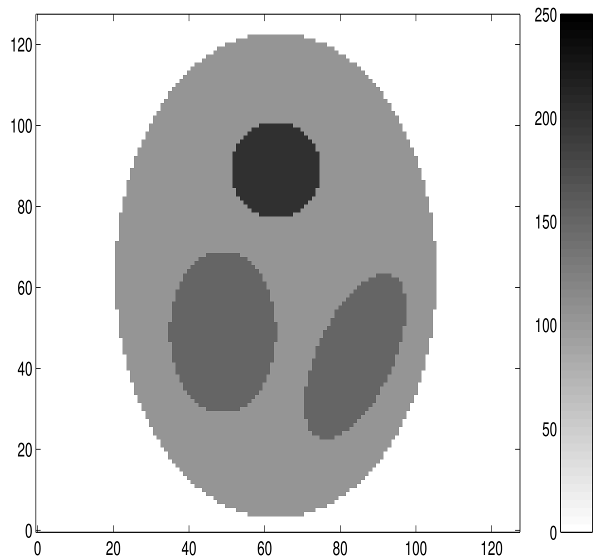
Resultater

I dette kapitel vil resultaterne af postprocesseringen blive præsenteret. Der er udført test på en simplificeret udgave af Shepp-Logan fantomet som foreslået i [Che94]. På grund af kompleksiteten af CMRF modellen, dvs. antallet af model parametre, vil en fuldstændig optimal fastlæggelse af alle parametrene ikke være mulig indenfor rammerne af dette projekt.

For en nærmere beskrivelse af de implementerede rutiner til Mean Field Annealing henvises til appendix C.

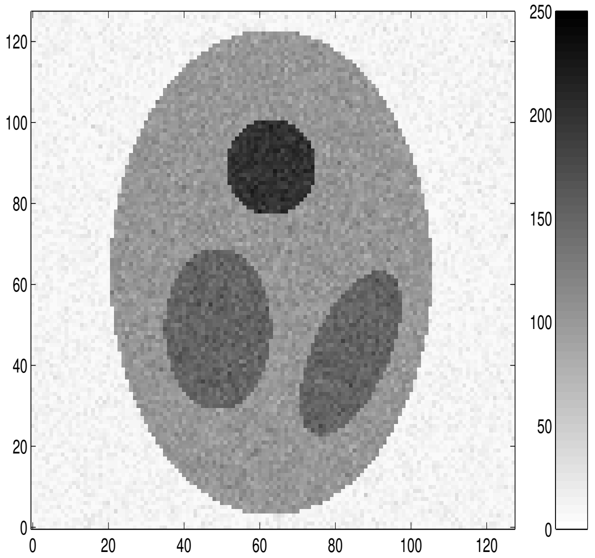
5.1 Fantomets opbygning

Det benyttede fantom er vist på figur 5.1. Fantomet består af fire ellipser, hvor den største har styrken 100, og de andre har derudover styrkerne 50 og 100. Dette giver en samlet styrke på 200 for den mindste ellipse og 150 for de to andre.

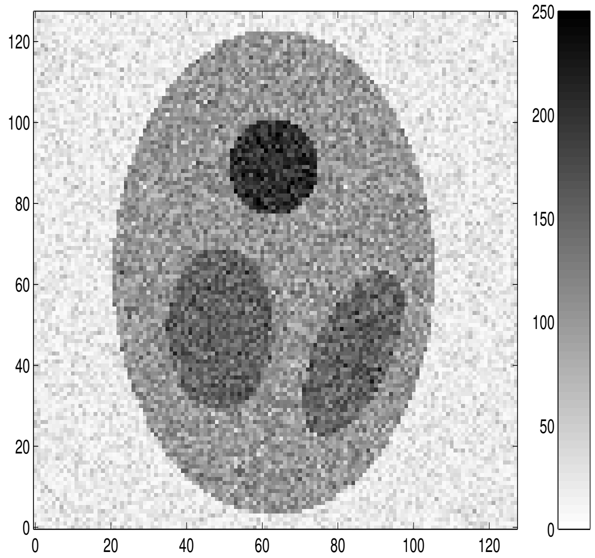


Figur 5.1: Det modificerede Shepp-Logan fantom.

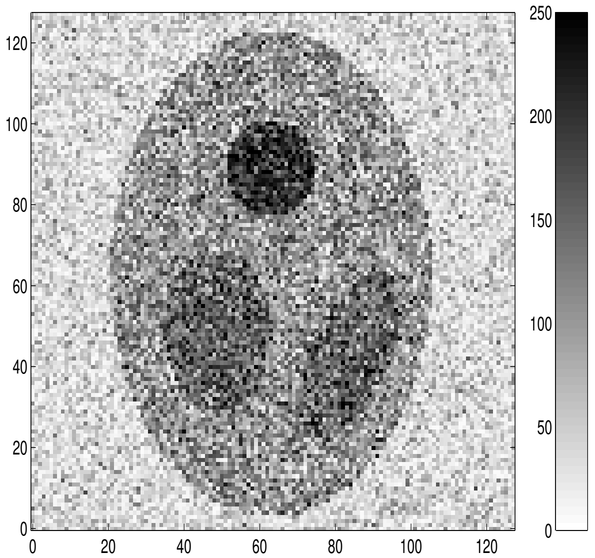
Til dette fantom er der tilføjet Gausisk hvid støj med middelværdi 0 og varians σ^2 på 10, 25, 50 og 75, hvilket er vist på figurerne 5.2 til 5.5.



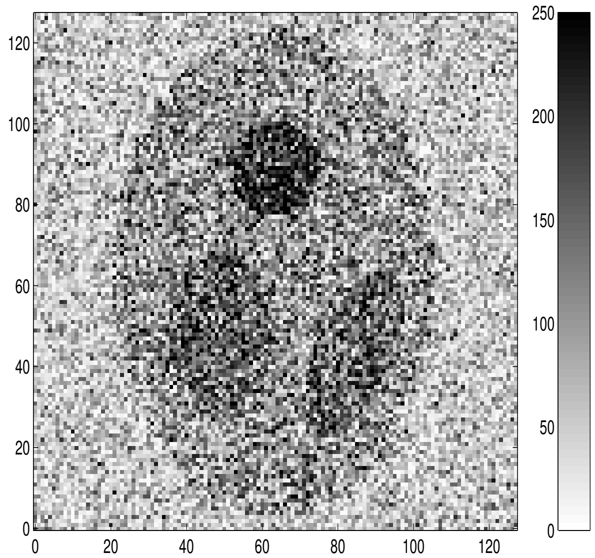
Figur 5.2: Fantomet tilført hvid støj, $\sigma^2 = 10$.



Figur 5.3: Fantomet tilført hvid støj, $\sigma^2 = 25$.



Figur 5.4: Fantomet tilført hvid støj, $\sigma^2 = 50$.



Figur 5.5: Fantomet tilført hvid støj, $\sigma^2 = 75$.

Alle figurerne af fantomet vil blive vist med skalaen [0 : 250], og for ikke at give et falsk indtryk af støjen udenfor den store ellipse er der taget den absolutte værdi af hvert enkelt billedelement.

5.2 Annealing parametre

Der er ikke lavet en fuldstændig udtømmende forsøgsrække til bestemmelse af annealing parametrene, da der ikke er lavet en egentlig analyse af CMRF modellens faseovergange. Ved eksperimenter er der fundet frem til følgende annealing parametre

$$\beta_{start} = 0.0010 \quad (5.1)$$
$$\beta_{stop} = 1.0010 \quad (5.2)$$
$$N = 20 \quad (5.3)$$

Disse er benyttet i resten af testkørslerne, dog velvidende at de ikke er optimalt bestemt.

5.3 Fastlæggelse af modellens parametre

I disse første undersøgelser af modellens opførsel overfor de enkelte parametre vil det observerede billede være tilføjet Gausisk støj med variansen $\sigma^2 = 10$. Dette fastlægger parameteren $w = 1/10 = 0.1$ i formel (4.6).

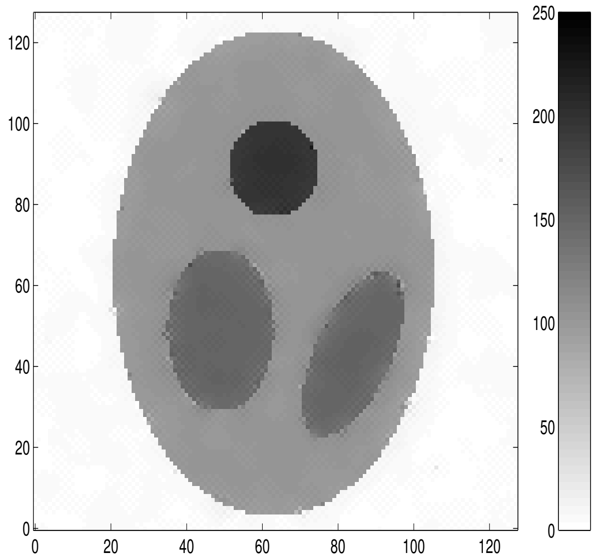
Først ønskes parameteren $\mu = \mu^h = \mu^v$ bestemt når $\gamma = 0$, hvilket svarer til den først opstillede model for prior, formel (3.5). De valgte μ værdier svarer, ved brug af formel (3.9), til et interval på [20 : 50] for at kunne aktivere en kant. Til vurdering benyttes det tidligere definerede L_2-mål, da der visuelt ikke er stor forskel.

μ	K^0	L_2
200	20	0.094
300	24.5	0.097
400	28.3	0.096
500	31.6	0.098
750	38.7	0.109
1000	44.7	0.141
1250	50	0.152

Til sammenligning er L-målet før postprocesering $L_2 = 0.1616$. Som det ses af ovenstående, skal parameteren μ ligge i intervallet [200 : 500], for lavere værdier af μ vil det blive attraktivt med aktive kantelementer mellem de fleste billedelementer. Det rekonstruerede billede er vist, for $\mu = 300$, på figur 5.6.

Det kan ses af figuren, at der ikke er en lukket kantkurve, for de to ellipser, med en kantforskel på 50. For at afhjælpe dette, benyttes en udvidet prior model, se formel (3.10).

Da parameteren γ ikke kan vælges uafhængigt af μ, er forholdet γ/μ undersøgt for tre værdier, først $\gamma/\mu = 0.25$



Figur 5.6: Fantom tilført støj med $\sigma^2 = 10$, filtreret med $\mu = 300$.

μ	K^0	L_2
200	20	0.084
300	24.5	0.076
400	28.3	0.083
500	31.6	0.088
750	38.7	0.102
1000	44.7	0.112
1250	50	0.130

dernæst for $\gamma/\mu = 0.40$

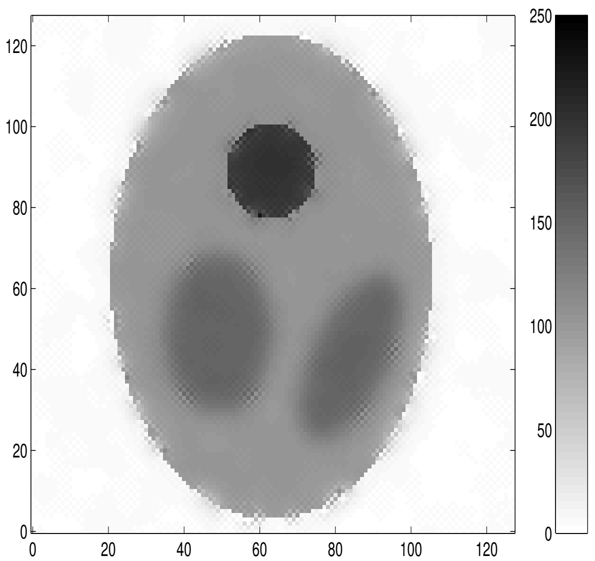
μ	K^0	L_2
200	20	0.076
300	24.5	0.065
400	28.3	0.076
500	31.6	0.075
750	38.7	0.095
1000	44.7	0.103
1250	50	0.112

Tilsidst er grænsetilfældet $\gamma/\mu = 0.50$, hvor $K^- = 0$, undersøgt

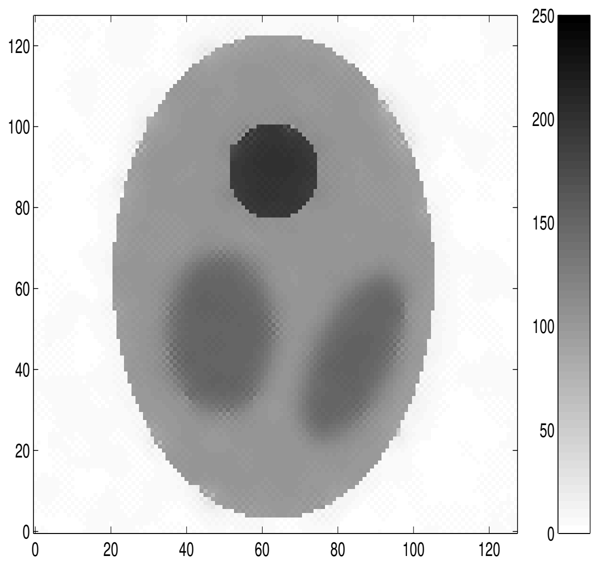
μ	K^0	L_2
200	20	0.075
300	24.5	0.066
400	28.3	0.062
500	31.6	0.056
750	38.7	0.051
1000	44.7	0.056
1250	50	0.069

Det ses, at der opnås bedre resultater, ved at benytte en prior hvori der indgår relationer mellem nabokantelementerne.

Til at illustrere forskellen er det degenererede billede med $\sigma^2 = 25$ rekonstrueret med $\mu = 1000$ og $\gamma = 0$ henholdsvis $\gamma = 500$. Resultaterne ses på figurerne 5.7 og 5.8.



Figur 5.7: Fantomet tilført støj med $\sigma^2 = 25$, rekonstrueret med $\mu = 1000$ og $\gamma = 0$.



Figur 5.8: Fantomet tilført støj med $\sigma^2 = 25$, rekonstrueret med $\mu = 1000$ og $\gamma = 500$.

Tilsvarende kan de horisontale kantelementer ses på figurerne 5.9 og 5.10.

Det kan ses af figurerne, at det, med brug af γ, er lykkedes at få lukket hullerne i kanten om den store ellipse. Det lykkedes ikke at få detekteret kanterne til to af ellipserne, da disse er for lave til at blive detekteret, idet $K^0 = \sqrt{2 \cdot 1000} = 44.72$.

Det var ikke muligt at finde parametre til modellen, der kunne rekonstruere for $\sigma^2 = 50$ eller derover. De viste resultater for $\sigma^2 = 25$ var også de eneste stabile ved dette støjniveau.

5.3.1 Check af annealing parametre

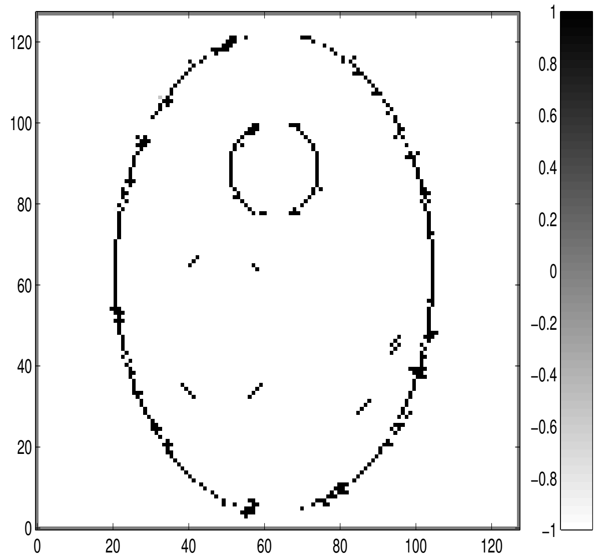
Som check for, om der er valgt rimelige annealing parametre, er der vist en række horisontale kantelementer, ved forskellige iterationstrin, på figurerne 5.11 til 5.14.

Efter 12. iteration vil kantelementerne ikke ændre sig betydeligt, hvilket kunne tyde på, at annealing parametrene fordelagtigt kunne ændres. Ved at vælge en højere sluttemperatur – lavere β_{stop} – vil billedet ikke nå at blive tilstrækkelig filtreret. Dette kan dog afhjælpes ved at fortsætte nogle iterationer, hvor β fastholdes på β_{stop}.

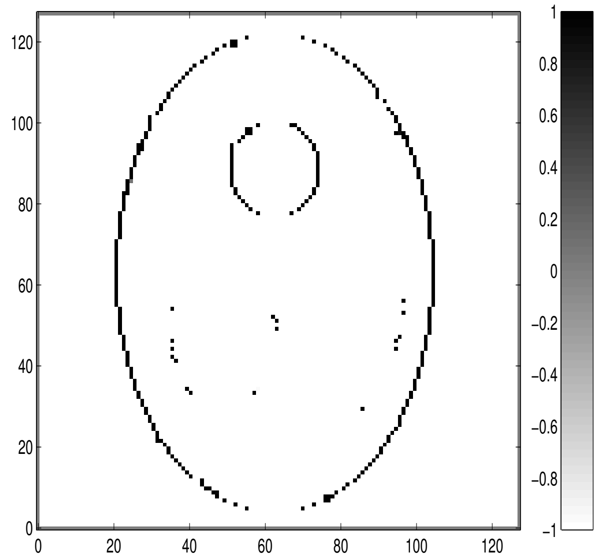
5.3.2 Resultater ved brug af snake som prior

Da de tidligere prior modeller ikke kunne finde kanterne med en højde på 50, når støjniveauet oversteg $\sigma^2 = 25$, blev der implementeret en snake.

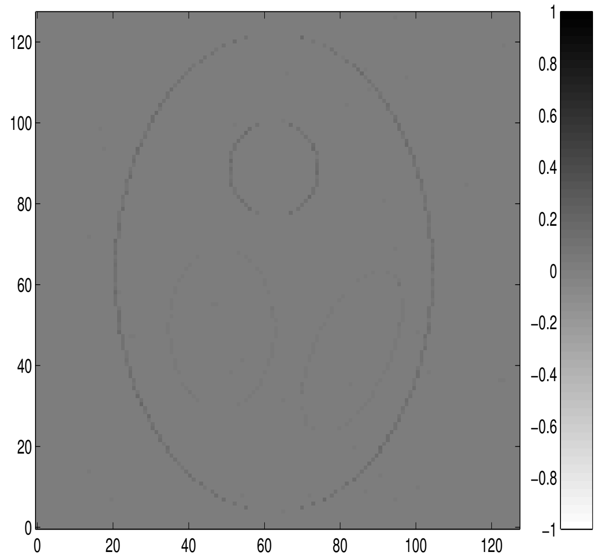
Den blev testet på billedet tilføjet støj med $\sigma^2 = 75$. Resultaterne findes i artiklen i appendix A, og er gengivet her. På figur 5.15 ses gradient energilandskabet, hvor startgættet for snaken er markeret med sort. Snaken består af 20 snaxels og er efter endt iteration markeret med hvidt.



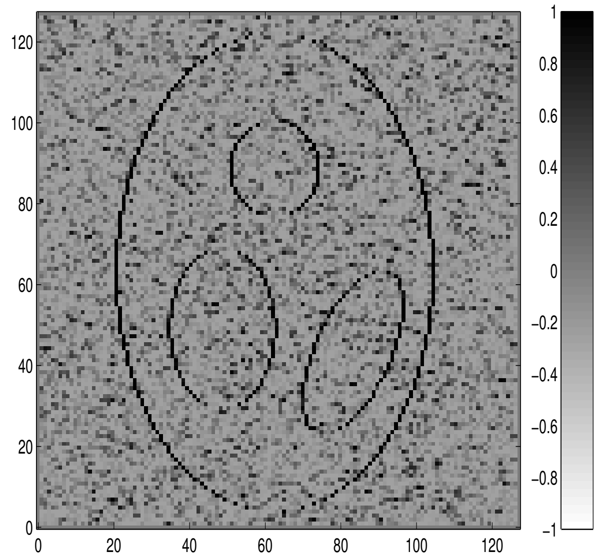
Figur 5.9: Billede over horisontale kantelementer, rekonstrueret med $\mu = 1000$ og $\gamma = 0$.



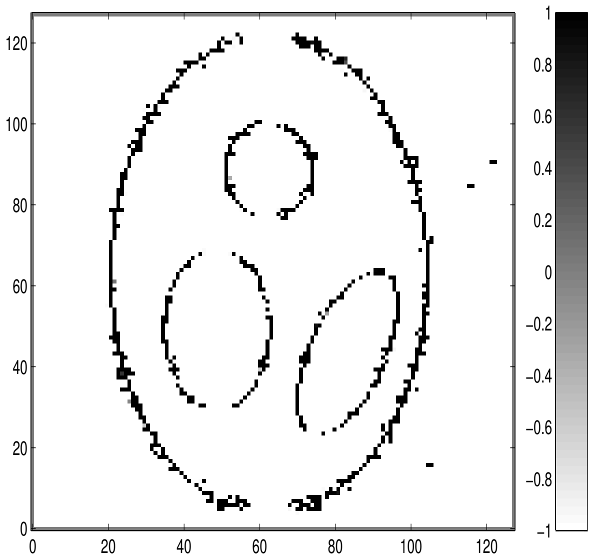
Figur 5.10: Billede over horisontale kantelementer, rekonstrueret med $\mu = 1000$ og $\gamma = 500$.



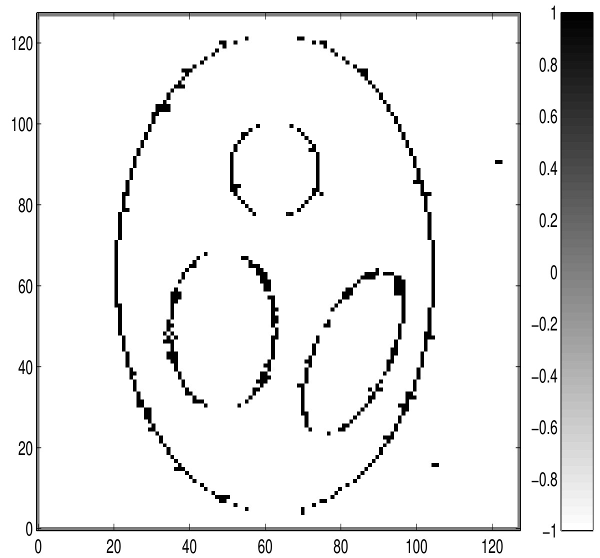
Figur 5.11: Billede over horisontale kantelementer efter 1. iteration.



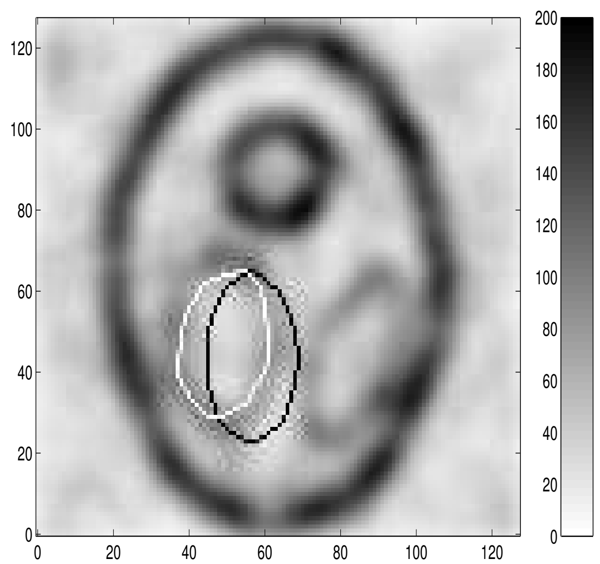
Figur 5.12: Billede over horisontale kantelementer efter 4. iteration.



Figur 5.13: Billede over horisontale kantelementer efter 8. iteration.

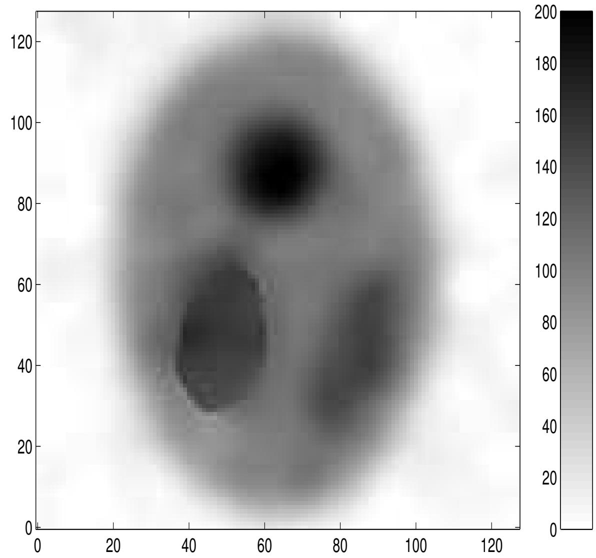


Figur 5.14: Billede over horisontale kantelementer efter 12. iteration.



Figur 5.15: Gradient energilandskabet hvor startgættet for snaken er markeret med sort, og slutplaceringen er markeret med hvidt.

Udfra placeringen af snaken tildeles $\mu^h_{m,n}$ og $\mu^v_{m,n}$ værdien 0, hvor snaken er placeret, og 10000 ellers. Disse værdier er valgt for kun at aktivere kantelementer, der hvor snake'n er placeret. Efter initialisering af $\mu^h_{m,n}$ og $\mu^v_{m,n}$ rekonstrueres billedet, og resultatet kan ses på figur 5.16.



Figur 5.16: Rekonstruktion ved brug af stedafhængige parametre.

Som det ses af figur 5.16, er det muligt at opnå et godt resultat ved brug af en snake som prior til rekonstruktionen. Da en snake er opbygget af rette linier, vil det ikke være muligt at få omkredsen af det undersøgte objekt præcists bestemt. En mulig fremgangsmåde, til løsning af dette problem, kan være at indføre naborelationer mellem kantelementerne. Dette kræver dog at prior, givet ved snaken, mindskes, hvilket kan ske ved at gøre snaken tykkere. Dette forhold er dog ikke undersøgt i denne rapport.

5.4 Generel estimering af parametere

For at de estimerede parametre ikke skal afhænge af en skaleringsfaktor i det observerede billede, kan dette normeres inden rekonstruktion. En mulig normering af billedet er til middelværdi 0 og spredning 1. Efter filtreringen kan det rekonstruerede billede skaleres således, at dette i intensitetsværdier svarer til det observerede billede.

Ved normering af det observerede billede skulle det være enklere at estimere modellens parametre til rekonstruktion af flere typer af billeder.

Det har, ved den opstillede model, ikke været let at finde parametre, hvor et stabilt resultat kunne opnås. Dette kan ifølge [GG91] delvist forbedres ved at benytte formel (4.7) som opdateringsformel.

5.5 Konklusion

Der er opstillet og implementeret en CMRF model til at filtrere et støjfyldt billede, hvor der tillades diskontinuiteter i form af kanter i billedet. En simpelt opstillet kantmodel, hvor de enkelte kantelementer kun er afhængige af billedets intensitetsværdier, gav ikke et tilfredsstillende resultat iform af lukkede kantkurver. Derfor blev der opstillet en model, hvor der er indbygget en afhængighed mellem naboelementerne.

Denne model gav tilfredsstillende resultater for lave støjniveauer i det observerede billede, men parametrene i modellen kunne ikke bestemmes for højere støjniveauer.

For at opnå bedre resultater, selv ved højere støjniveauer, er en snake implementeret. Dette gav bedre resultater, men kræver, at placering og størrelse af det søgte objekt kendes. Denne teknik, med brug af en snake som prior er umiddelbart lovende, men en omfattende undersøgelse er nødvendig. Til tolkning af PET billeder kan en snake udnyttes ved undersøgelse af bestemte områder i hjernen, da placeringen og størrelsen af disse er kendt på forhånd.

Bibliografi

[Bla89] A. Blake. Comparison of the efficiency of deterministic and stochastic algorithms for visual reconstruction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI(11), 1989.

[CC93] L. Cohen and I. Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2-d and 3-d images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI(15):1133–1147, 1993.

[Che94] C. T. Chen et al,. Incorporation of correlated structural images in pet image reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13:627–640, 1994.

[Dea93] S. R. Deans. *The Radon Transform and Some of Its Applications.* Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1993. Previously John Wiley & Sons Inc., 1983.

[GG84] D. Geman and S. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6:721–741, 1984.

[GG91] D. Geiger and F. Girosi. Parallel and deterministic algorithms from mrf's: Surface reconstruction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(5):401–412, 1991.

[Har78] Frederic J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 77(1), January 1978.

[Hay94] Simon Haykin. *Neural Networks, A Comprehensive Foundation.* Macmillan, 1994.

[Jai89] A. K. Jain. *Fundamentals of Digital Image Processing.* Prentice Hall, 1989.

[JHP91] A. Krogh J. Hertz and R.G. Palmer. *Introduction to the Theory of Neural Computation.* Addison Wesley, New York, 1991.

[Kle94] R. P. Kleihorst et al. A robust l-estimater for filtering quantum limited image sequences. *Signal Processing*, (7):1508–11, 1994.

[Sha94] L. Shao, J. S. Karp and P. Countryman. Prectical considerations of the wiener filtering technique on projection data for pet. *IEEE conference records, Nuclear Science & Medical Imaging*, 1994.

[Sto94] Geir Storvik. A baysian approach to dynamic contours through stochastic sampling and simulated annealing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(10):976–986, 1994.

[Sun93] Winston Y. Sun, Stephen E. Derenzo and Thomas F. Budinger. An adaptive wiener filter for pet based on a novel technique for spectral estimation. *IEEE conference records, Nuclear Science & Medical Imaging*, 1993.

[ZC93] J. Zerubia and R. Chellappa. Mean field annealing using compound gauss-markov random fields for edge detection and image estimation. *IEEE Transactions on neural networks*, 4(4):703–709, 1993.

Appendix A

Artikel om brug af snake i rekonstruktion af billeder.

På de følgende sider er der en kopi af den indsendte artikel til konferencen Neural Networks in Signal Processing (NNSP). Den er lavet af Peter Philipsen,Lars Kai Hansen og Peter Toft. Den omhandler brug af en sammenhængende kant (snake) som prior til en Mean Field rekonstruktion af et støjfyldt billede. Artiklen er indleveret den 17. februar 1995.

Appendix B

Program til preprocessering

Preprocesseringen er implementeret som en udvidelse af programmet til direkte rekonstruktion, se appendix C i del I.

B.1 Parametre

De nye parametre, der kan indtastes ved brug af programmet iradon, er følgende:

Filtertype Her specificeres hvilken filtrering, der skal benyttes. For alle inverteringsrutinerne findes : `Average` og `Median`. Specielt for Filtered Backprojection findes: `Hanning`, `Hamming` og `SheppLogan`.

Kernelwidth Hvis der benyttes `Average` eller `Median` filtrering, sættes filterkernebredden.

Kernelheigth Hvis der benyttes `Average` eller `Median` filtrering, sættes filterkernehøjden.

MedianNumber Hvis filtertypen er `Median`, er den valgte fraktil specificeret her.

B.2 Program udskrift

På de følgende sider vil der være en udskrift over de ændrede rutiner til preprocessering.

Filerne er placeret på disketten under `/prepro`, og er følgende.

- `calc.c` Side 1.
- `misc.h` Side 4.
- `misc.c` Side 5.

Appendix C

Program til postprocessering

Som input til postprocesserings programmet benyttes samme struktur som under del I.

C.1 Paremetre

Det er følgende parametre, der skal specificeres

InFileName Input fil, det observerede billede der skal filtreres.

OutFileName Output fil, navnet på det filtrerede billede.

BetaStart Start værdi til annealing parameteren.

BetaStop Slut værdi til annealing parameteren.

N Antallet af iterationer.

Muh fastlæggelse af parameteren μ^h

Muv fastlæggelse af parameteren μ^v

Gamma fastlæggelse af parameteren γ

SaveEveryNumber Gemmer resultatet for hver iterationsnummer, som angivet, startende efter første iteration.

Appendix D

Oversigt over 'Mean Field' programmet

I dette appendix er der en oversigt over det implementerede Mean Field program. Der er en udskrift af programmet, samt henvisning til hvor programmet er placeret på den medfølgende diskette.

D.1 Funktionsbeskrivelse

Der kommer en kort beskrivelse af de udviklede rutiner til Mean Field annealing og til opdatering af den implementerede snake.

Convolution Folder to billeder af **Image** formatet. Det ene er normalt en filterkerne. Returnerer foldningen i samme størrelse som første argument.

GaussFilter Opretter en Gauss Filterkerne hvor bredde og varians kan specificeres.

AddImages Adderer to billeder af samme størelse.

DevXImage Returnerer et billede, hvori de afledede i x-retningen er beregnet.

DevYImage Returnerer et billede, hvori de afledede i y-retningen er beregnet.

VerticalEdgeKernel Filterkerne til at detektere vertikale kantelementer ved en foldning.

HorizontallEdgeKernel Filterkerne til at detektere horisontale kantelementer ved en foldning.

WriteLine Tegner en ret linie i det angivne billede, mellem to specificerede punkter, med en valgt styrke.

WriteSnaxels Indtegner en snake, i et givet billede, med en givet styrke.

UpdateSnaxels Opdaterer en snake udfra et start gæt og et gradient energilandskab.

MeanField Udfører Mean Field annealing med de specificerede parametre.

DoSnake Finder snake udfra startgæt. Beregner gradient energilandskab og udfører Mean Field annealing.

D.2 Placering af filerne på disketten

Programmet til Mean Field Annealing er vist på de følgende sider og er placeret på disketten i direktoriet `´/meanfiel´`.

- `Makefile` Side 1.
- `mean.ini` Side 2.
- `meanfield.c` Side 3.