Kapitel 9

Resultater

I dette kapitel vil resultaterne af de kørsler der er foretaget med de implementerede direkte rekonstruktions algoritmer, blive præsenteret. De forudsætningerne kørslerne er blevet foretaget under vil blive beskrevet. De opnåede resultater vil blive beskrevet og kommenteret, og en vurdering af rekonstruktions algoritmerne vil blive givet på grundlag af disse resultater.

9.1 Vurdering af resultater

Resultaterne vil, som beskrevet i kapitel 8, blive vurderet ud fra en visuel inspektion af de rekonstruerede billeder, og udregningen af et opstillet fejlmål. Det brugte fejlmål er den normaliserede standardafvigelse mellem det rekonstruerede billede og referencebilledet, det såkaldte L_2-mål. Dette er defineret som

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{\sigma_{org}^2 MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(f_{rec}(m,n) - f_{org}(m,n)\right)^2}\,, \tag{9.1}$$

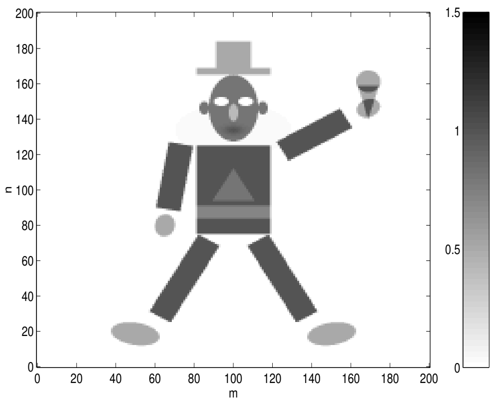
hvor f_{rec} er det rekonstruerede billede, og f_{org} er reference billedet, og

$$\sigma_{org}^2 = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} (f_{org}(m,n) - \bar{f}_{org})^2, \qquad \bar{f}_{org} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{org}(m,n). \tag{9.2}$$

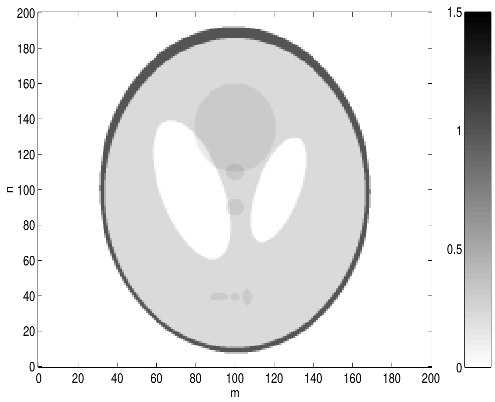
I forbindelse med vurdering af billeder rekonstrueret med Filtering after Backprojection algoritmen, vil DC-værdien blive trukket fra både rekonstruktionen og referencebilledet før udregning af L_2-målet, idet denne metode vil nulstille DC-værdien i output billedet.

9.2 Testbilleder

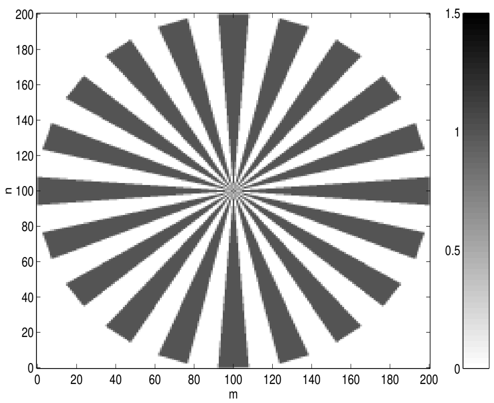
I det følgende vil der blive gjort brug af *man*, *phantom*, *radial* og *spiral* fantomerne. Data for disse kan findes i appendix B. På figur 9.1 til 9.4 er disse vist. Fantomerne er vist numerisk med en lineær gråtone skala repræsenterende værdier i intervallet [0; 1.5] hvor hvid repræsenterer værdien 0, og sort værdien 1,5.



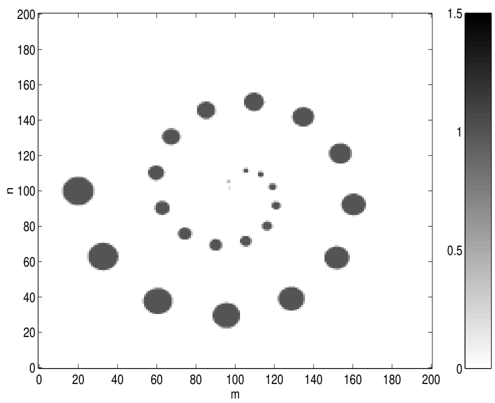
Figur 9.1: *man* fantom.



Figur 9.2: *phantom* fantom.



Figur 9.3: *radial* fantom.



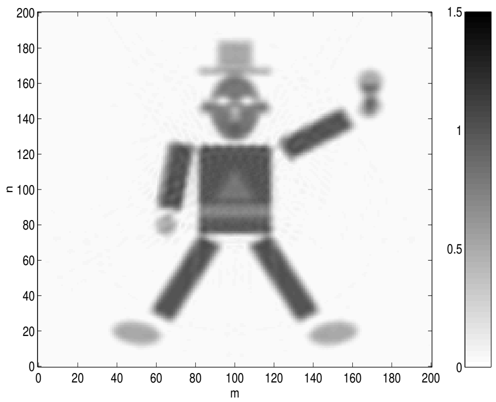
Figur 9.4: *spiral* fantom.

9.3 Bestemmelse af sinogram- og billedstørrelser

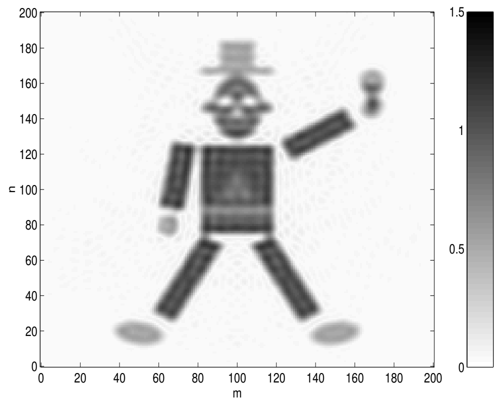
Den billedstørrelse det er valgt at rekonstruere, er (201×201) punkter, hvilket repræsenterer en realistisk størrelse, men høj nok opløsning til at muliggøre detektion af de mindste artifakter der formodes at ville forekomme i billederne.

9.3.1 Sinogrammets størrelse

Hvor meget information behøves der i sinogrammet for at rekonstruere et billede med den valgte størrelse, således at artifakter på grund af undersampling af sinogrammet ikke vil være ødelæggende for tolkningen af billedet? For at bestemme dette, er der foretaget to kørsler med *man* hhv. *spiral* fantomet. På figur 9.5 og 9.6 er vist billeder af disse, rekonstrueret med Filtered Backprojection (FB) algoritmen hhv. Central Slice algoritmen med chirp-z interpolation (CC), fra et sinogram der er samplet med $R = 75$ værdier i ρ-retningen og $T = 200$ værdier af θ. Det ses på billederne at rekonstruktionen er meget lavfrekvent, og at Central Slice rekonstruktionen er overlejret af svingninger.

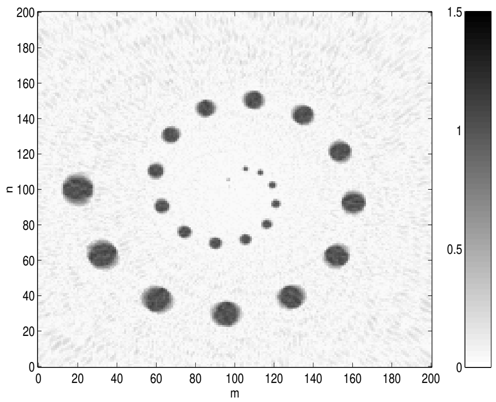


Figur 9.5: $R = 75$, $T = 200$, FB.

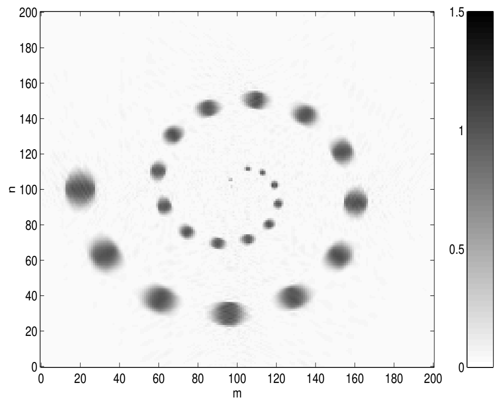


Figur 9.6: $R = 75$, $T = 200$, CC.

På figur 9.7 og 9.8 er vist *spiral* fantomet rekonstrueret fra et sinogram samplet med $R = 251$ værdier i ρ-retningen og $T = 50$ værdier i θ-retningen. Det ses at en undersampling af θ vil føre til angulære artifakter i billederne. Dette er mest udtalt i Central Slice rekonstruktionen.

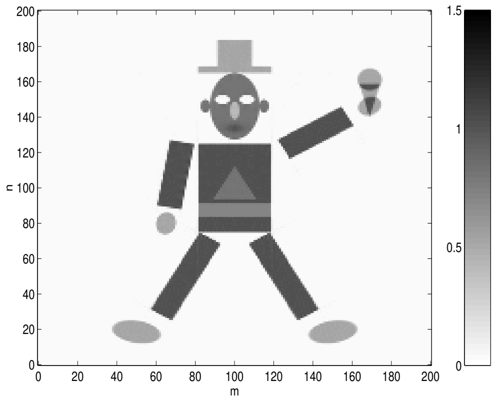


Figur 9.7: $R = 251$, $T = 75$, FB.

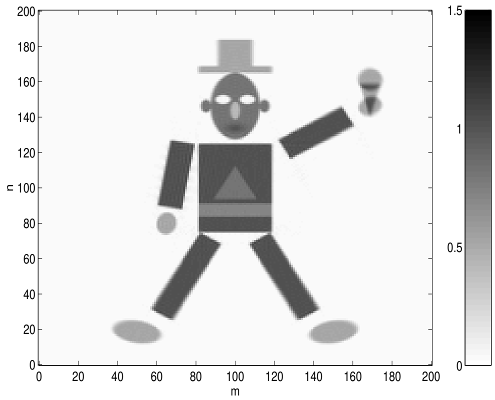


Figur 9.8: $R = 251$, $T = 75$, CC.

Ud fra disse kørsler vurderes, at et sinogram samplet med $R = 251$ værdier i ρ-retningen og $T = 200$ værdier af θ vil være tilstrækkeligt til at sikre, at der ikke kommer artifakter i det rekonstruerede billede på grund af undersampling. For at illustrere dette, er der på figur 9.9 vist et billede af *man* fantomet rekonstrueret fra et sinogram samplet med $R = 501$ og $T = 400$. På figur 9.10 er vist samme fantom rekonstrueret fra et sinogram samplet med $R = 251$ og $T = 200$ med samme Central Slice algoritme. Som det ses, er rekonstruktionen fra det store sinogram næsten perfekt. Rekonstruktionen fra (251×200) punkters sinogrammet er kun en anelse mere uskarpt. Derfor antages det, at et sinogram på (251×200) punkter indeholder nok information til at rekonstruere et billede på (201×201) punkter uden at introducere fejl i rekonstruktionen grundet undersampling. Disse størrelser er brugt til alle testkørsler, med mindre andet er nævnt.



Figur 9.9: $R = 501$, $T = 400$, CC.



Figur 9.10: $R = 251$, $T = 200$, CC.

9.4 Sammenligning

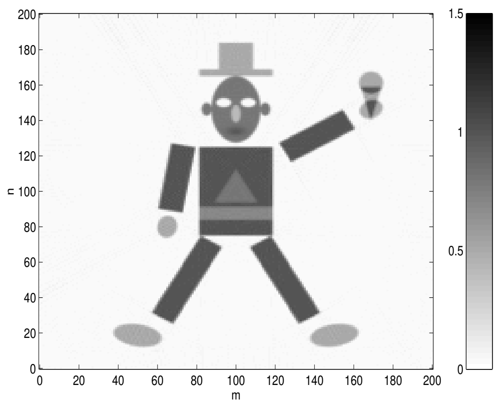
I de følgende afsnit vil de implementerede rekonstruktions algoritmer blive sammenlignet på grundlag af deres rekonstruktioner af de genererede fantomer. Vurderingen vil blive foretaget ved visuel inspektion af de rekonstruerede billeder, og ved udregning af L_2-målet. Rekonstruktions algoritmerne vil blive benævnt med forkortelser, hvor FB er Filtered Backprojection, FAB er Filtering after Backprojection, CB er Central Slice med bi-lineær interpolation og CC er Central Slice med chirp-z interpolation. Central Slice med nærmeste nabo interpolation er ikke blevet testet, da omkostningerne ved at lave bi-lineær interpolation i stedet er så små, at nærmeste nabo interpolation aldrig vil blive brugt i praksis.

9.4.1 Rekonstruktion af *man* fantomet

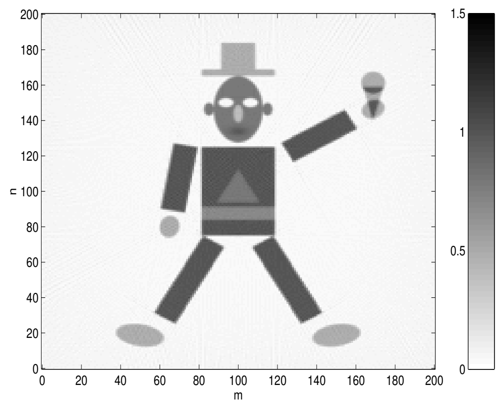
De rekonstruerede billeder af *man* fantomet er vist på figur 9.11 til 9.14 for de fire rekonstruktions algoritmer. Den visuelle kvalitet af billederne er næsten ens, bortset fra at Central Slice algoritmen med bi-lineær interpolation har en anelse mere baggrundsstøj end med chirp-z interpolation. De beregnede L_2-mål er:

	L_2
FB	0.107
FAB	0.086
CB	0.115
CC	0.083

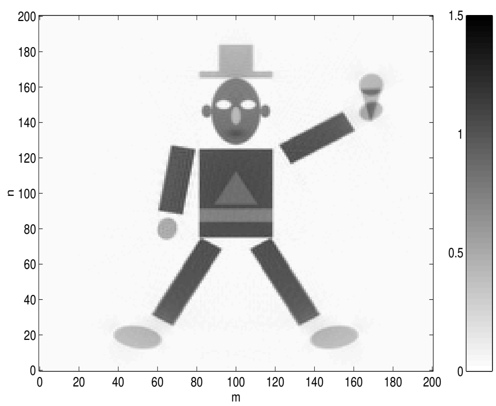
Som det ses får Central Slice algoritmen med chirp-z interpolation og Filtering after Backprojection algoritmen de bedste (laveste) L_2-mål.



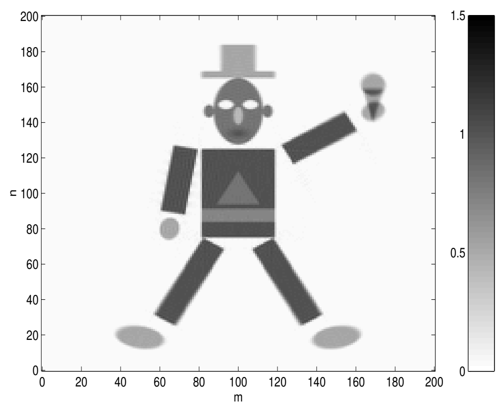
Figur 9.11: Filtered Backprojection.



Figur 9.12: Filtering after Backprojection.



Figur 9.13: Central Slice, bi-lineær.



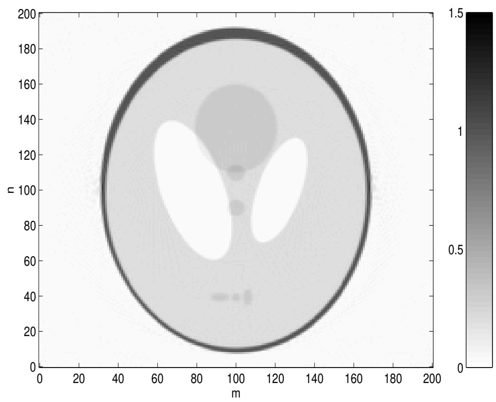
Figur 9.14: Central Slice, chirp-z.

9.4.2 Rekonstruktion af *phantom* fantomet

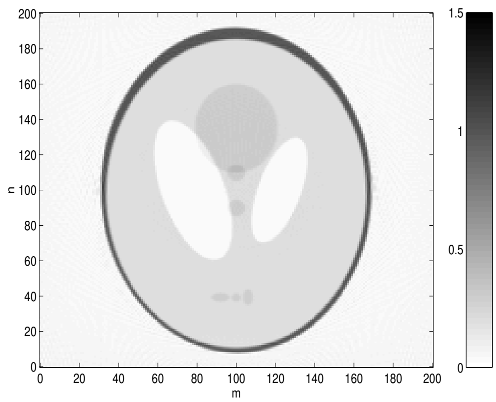
De rekonstruerede billeder af *phantom* fantomet er vist på figur 9.15 til 9.18 for de fire rekonstruktions algoritmer. På figur 9.17 ses, at Central Slice med bi-lineær interpolation ikke bestemmer niveauet korrekt på kanten af fantomet. Det kan tyde på, at den grove interpolation der bliver foretaget omkring origo i frekvens domænet har lavpas egenskaber, og vil betyde en multiplikation i det spatiale domæne med den Fourier transformerede af dette lavpas filter. L_2-målene er for de viste billeder:

	L_2
FB	0.151
FAB	0.120
CB	0.307
CC	0.107

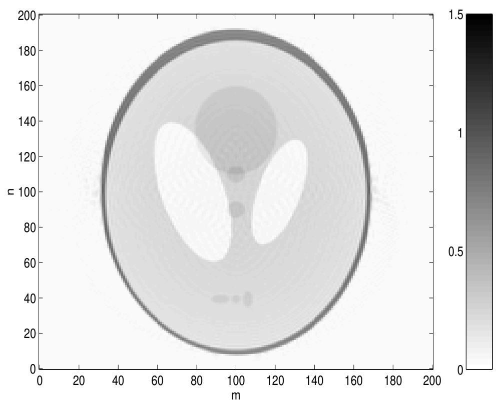
Central slice med bi-lineær interpolation, får på grund af interpolations fejlen et dårligt L_2-mål. Dette afspejler ikke billedets visuelle kvalitet, da det rekonstruerede billede har samme visuelle kvalitet som billederne rekonstrueret med de andre algoritmer.



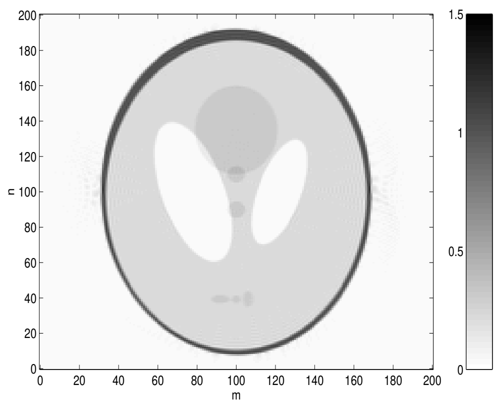
Figur 9.15: Filtered Backprojection.



Figur 9.16: Filtering after Backprojection.



Figur 9.17: Central Slice, bi-lineær.



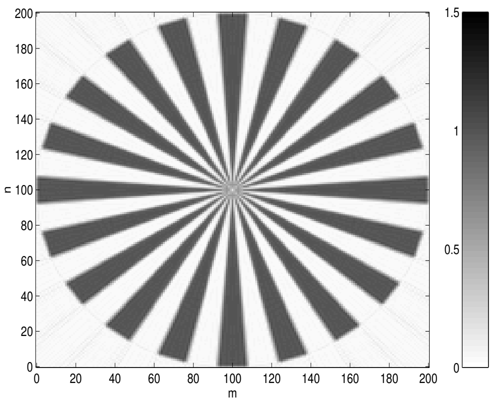
Figur 9.18: Central Slice, chirp-z.

9.4.3 Rekonstruktion af *radial* fantomet

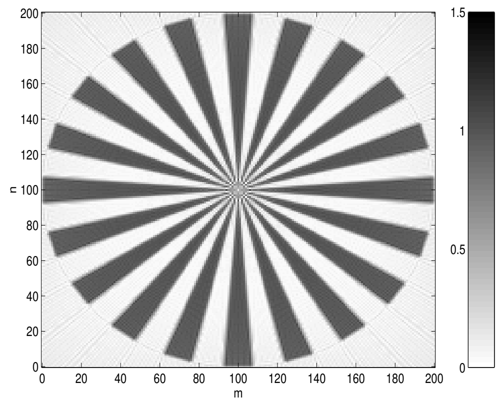
De rekonstruerede billeder af *radial* fantomet er vist på figur 9.19 til 9.22 for de fire rekonstruktions algoritmer. Dette fantom har høje spatiale frekvenser omkring origo. På billederne fra Fourier metoderne ses, at omkring origo er disse høje frekvenser ikke blevet rekonstrueret korrekt. Dette er en naturlig begrænsning ved Fourier metoderne, da de ikke kan rekonstruere frekvenser over $1/(2\Delta x)$. De filtrerede Tilbageprojektions metoder arbejder i det spatiale domæne, og vil derfor ikke have denne begrænsning. L_2-målene er for de viste billeder:

	L_2
FB	0.179
FAB	0.174
CB	0.211
CC	0.173

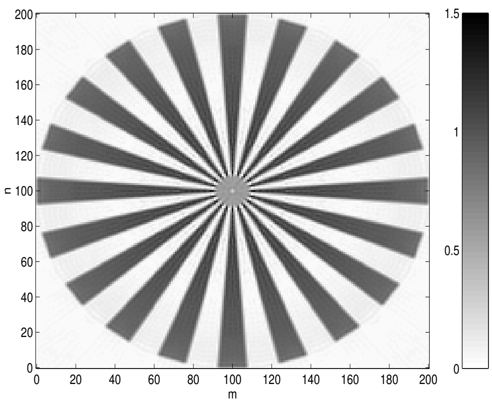
Det ses at Central Slice med bi-lineær interpolation ikke opnår samme L_2-mål som de andre algoritmer, dette skyldes igen normeringsproblemer, afhængigt af afstanden fra origo.



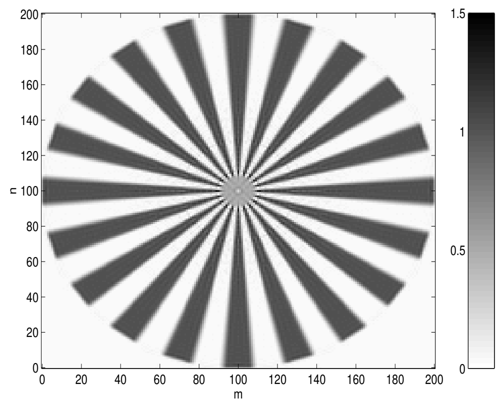
Figur 9.19: Filtered Backprojection.



Figur 9.20: Filtering after Backprojection.



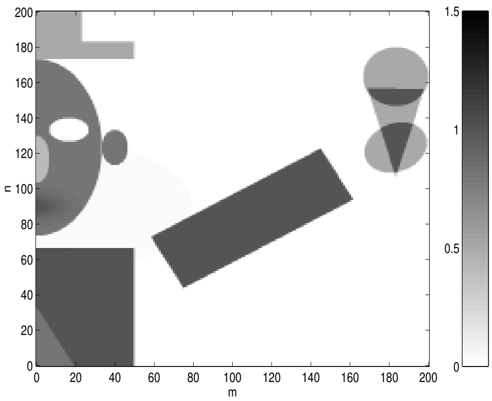
Figur 9.21: Central Slice, bi-lineær.



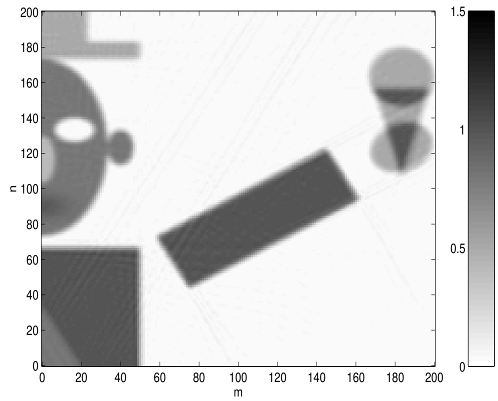
Figur 9.22: Central Slice, chirp-z.

9.5 Zoom i outputbilledet

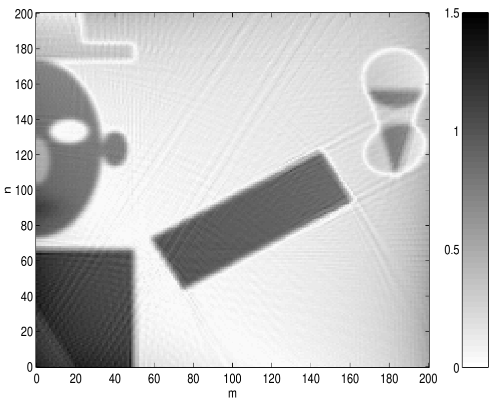
Der er lavet en enkelt kørsel, for at illustrere hvorledes der kan udføres zoom i det rekonstruerede billede. På figur 9.23 er vist det interesseområde af *man* fantomet der zoom'es ind på. På figur 9.24 til 9.26 er vist de rekonstruerede billeder for tre af rekonstruktions algoritmerne. Der er intet problem i at zoom'e i outputbilledet, blot vil billederne, hvis der zoom'es mere end der er information til i sinogrammet, blive uskarpe. Billedet for Filtering after Backprojection algoritmen viser ud over normeringsproblemer, at der muligvis er problemer med den måde hvormed der bliver foretaget zoom med denne metode.



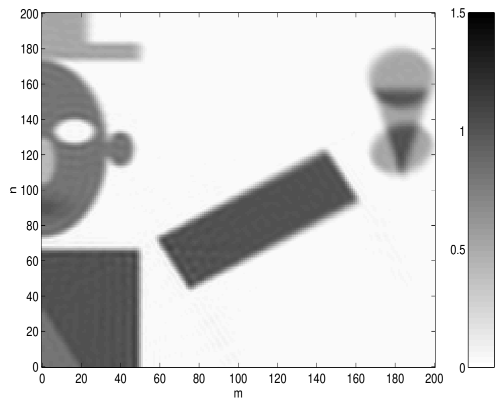
Figur 9.23: Interesseområde.



Figur 9.24: Filtered Backprojection.



Figur 9.25: Filtering after Backprojection.



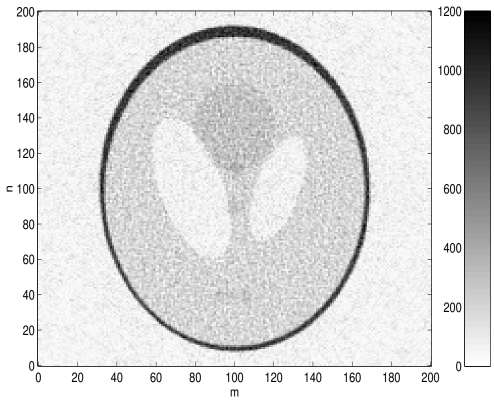
Figur 9.26: Central Slice, chirp-z.

9.6 Rekonstruktion af projektioner med støj

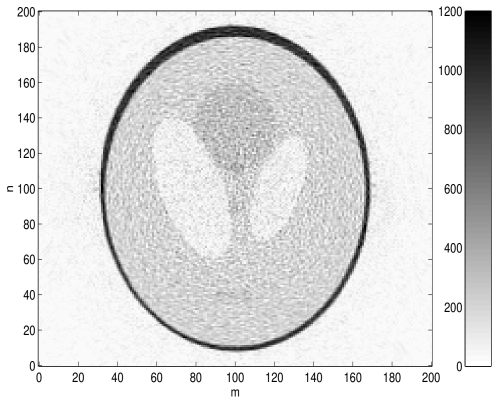
For at vurdere rekonstruktion algoritmernes opførsel over for rigtige data, der i sinogrammet kan modelleres til at følge en individuel Poisson-proces for hvert punkt, er der blevet foretaget en række kørsler med sinogrammer genereret således at de simulerer rigtigt opsamlede data som individuelle Poisson-processer. Disse er konstrueret ud fra sinogrammet for *phantom* fantomet. Der er genereret sinogrammer der simulerer tælletal c på: 10^7, $5 \cdot 10^6$ hhv. 10^6. Der er blevet foretaget rekonstruktion af de genererede sinogrammer med Filtered Backprojection og Central Slice algoritmen med chirp-z interpolation. De rekonstruede billeder ses på figur 9.27 til 9.32. Billederne er vist med intervaller der er direkte sammenlignelige. L_2-målene er for at kunne sammelignes udregnet på normerede billeder. L_2-målene er for de normerede billeder:

	$c = 10^7$ L_2	$c = 5 \cdot 10^6$ L_2	$c = 10^6$ L_2
FB	0.359	0.476	0.827
CC	0.332	0.440	0.784

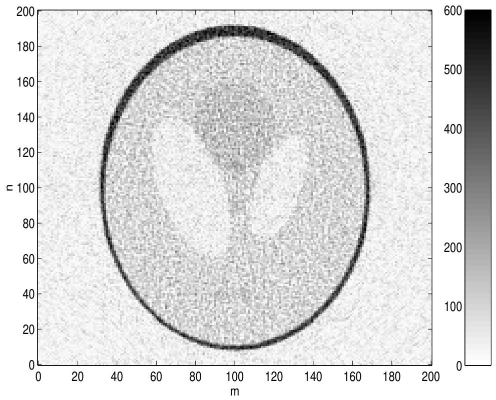
Det ses at introducering af støj i sinogrammerne vil ødelægge de rekonstruerede billeder, afhængigt af støjens styrke. De to viste algoritmer rekonstruerer billeder der visuelt er meget ens. L_2-målene er en anelse lavere for Central Slice med chirp-z interpolation end med Filtered Backprojection.



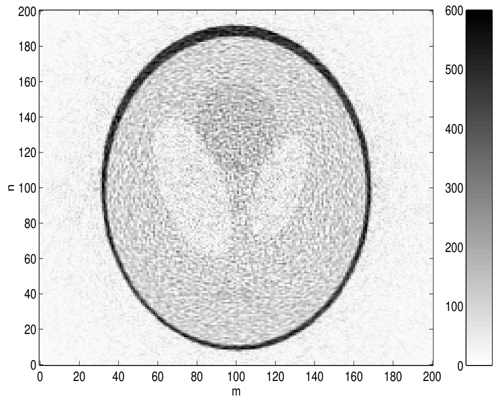
Figur 9.27: $c = 10^7$, FB.



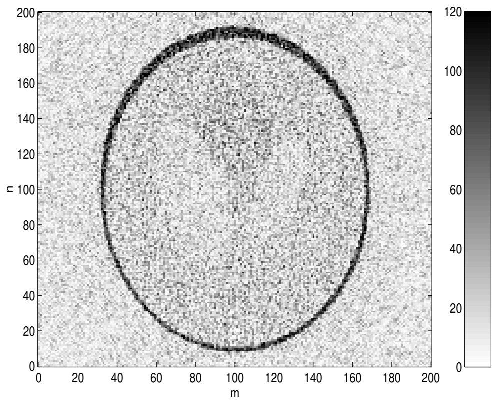
Figur 9.28: $c = 10^7$, CC.



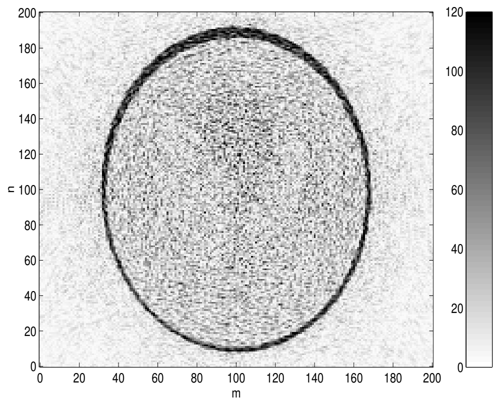
Figur 9.29: $c = 5 \cdot 10^6$, FB.



Figur 9.30: $c = 5 \cdot 10^6$, CC.



Figur 9.31: $c = 10^6$, FB.



Figur 9.32: $c = 10^6$, CC.

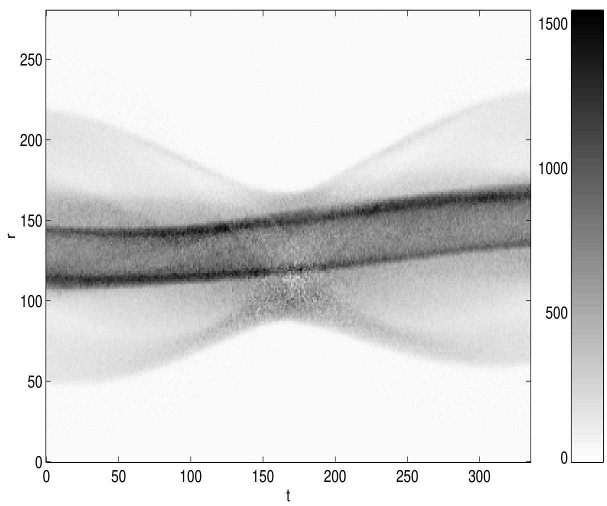
9.7 Rekonstruktion af rigtige sinogrammer

I dette afsnit, vil to sinogrammer fra Rigshospitalets PET skanner, og deres tilhørende rekonstruktion med en Central Slice rutine med chirp-z interpolation blive vist.

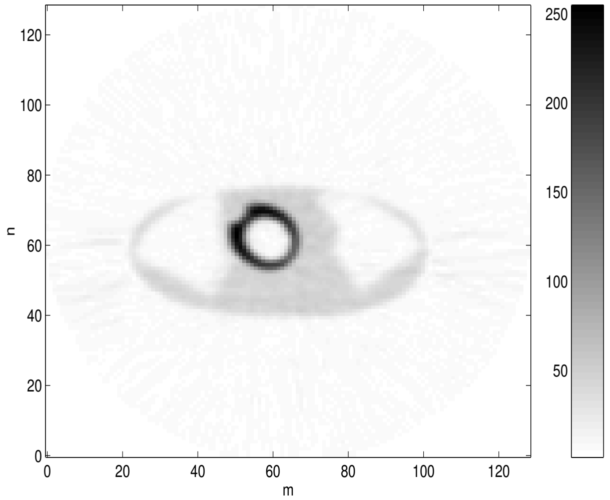
På figur 9.33 ses et sinogram for det fysiske hjerte fantom. På figur 9.34 og 9.35 er vist det rekonstruerede billede fra General Electric hhv. den implementerede Central Slice algoritme med chirp-z interpolation. Billederne viser ikke det samme udsnit. General Electric rekonstruktionen er med en opløsning på (128×128) punkter, CC rekonstruktionen på (400×400) punkter. Det ses på rekonstruktionen fra General Electric, at der er brugt filtrering i output billedet, for at dæmpe højfrekvent støj.

På figur 9.36 ses et sinogram for en hjernen af en forsøgsperson. På figur 9.37 er det rekonstruerede billede fra Central Slice algoritmen vist. Der er ca. $3 \cdot 10^6$ og $18 \cdot 10^6$ tælletal i sinogrammet for hjernen hhv. hjerte fantomet. Det lave antal detektioner i sinogrammet for hjernen afspejles i en dårligere rekonstruktions kvalitet. Det har ikke været muligt at få en General Electric rekonstruktion af dette billede.

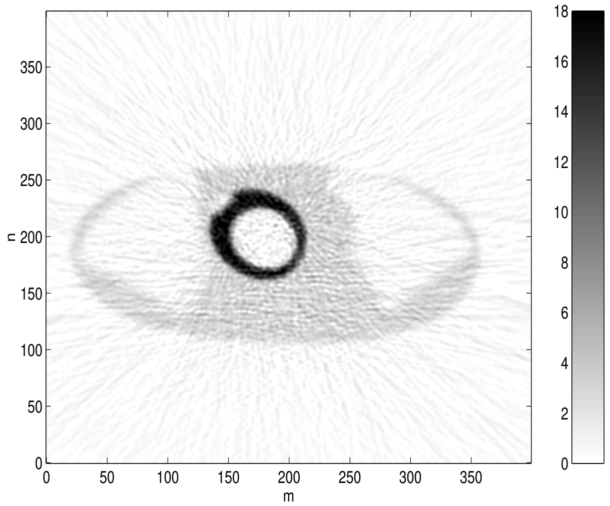
De dårlige billeder skyldes i høj grad scatter der har forårsaget falske detektioner. I kørslen med simulerede fantomer, fik et billede med 10^7 tælletal et forholdsvis pænere udseende end de her viste rekonstruktioner.



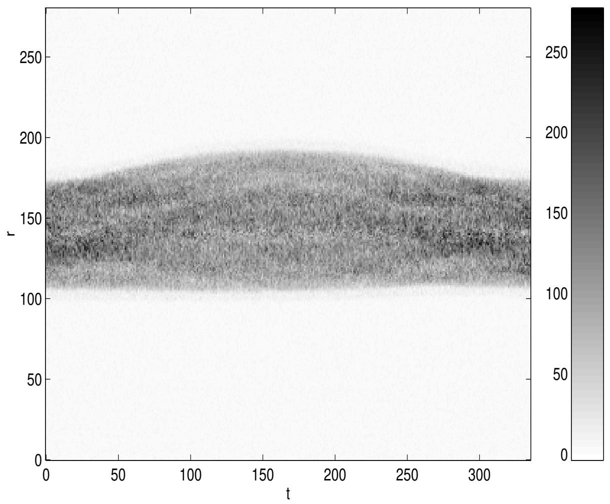
Figur 9.33: Sinogram for hjerte fantom.



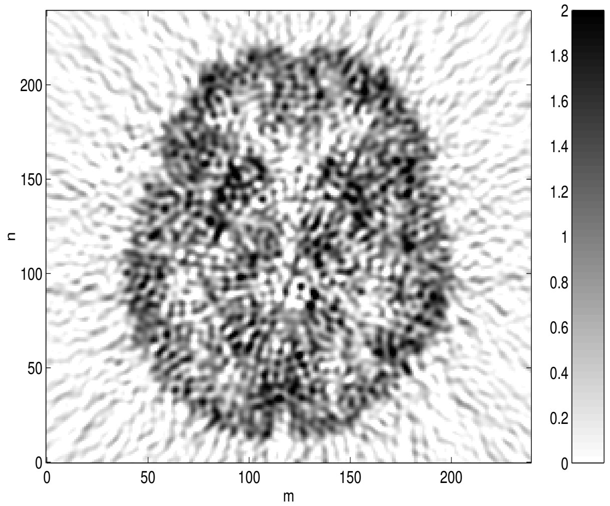
Figur 9.34: General Electric rekonstruktion.



Figur 9.35: `iradon` rekonstruktion, CC.



Figur 9.36: Sinogram for menneske hjerne.



Figur 9.37: `iradon` rekonstruktion, CC.

9.8 Rekonstruktionshastighed

For at vurdere de forskellige algoritmers rekonstruktionshastighed, er der blevet foretaget testkørsler med varierende sinogram- og billedstørrelser. De vigtigste resultater fra disse kørsler vil blive præsenteret her.

Den målte rekonstruktionstid for de implementerede direkte rekonstruktions algoritmer, er for den brugte standard sinogram- og billedstørrelse:

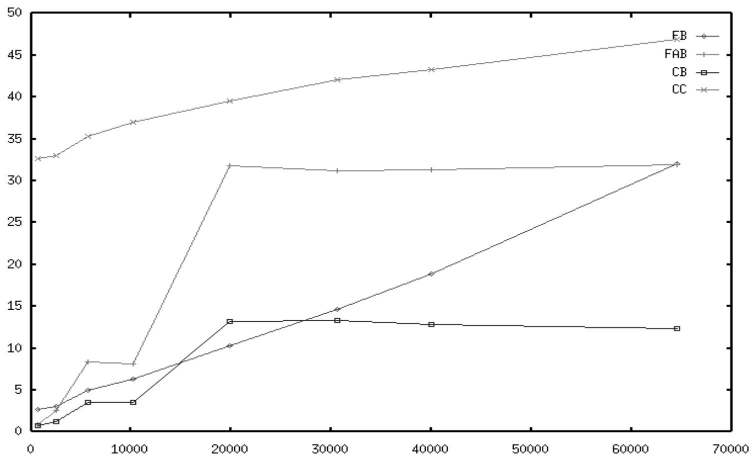
	t/s
FB	19,27
FAB	31.65
CB	12.91
CC	43.14

Hvor CB er Central Slice med Fourier invertering af spektret, og CC bruger med chirp-z transformationen til at invertering af spektret.

På figur 9.38 er vist en graf over rekonstruktionstiden i sekunder for de fire algoritmer, ved rekonstruktion af et (251×200) punkters sinogram, som funktion af antallet af punkter i outputbilledet. Det ses at Filtered Backprojection algoritmen som forventet viser lineær afhængighed af output billedets størrelse.

Rekonstruktions tiden for både Central Slice med Fourier invertering af spektret og Filtering after Backprojection vil være stærkt afhængige af nærmeste højere FFT længde, da begge rutiner er baseret på to-dimensionale FFT rutiner. På grafen ses dette tydeligt.

Central Slice med chirp-z invertering udregner størrelsen på spektret som funktion af antallet af ρ-samples. Da det er samme sinogram der inverteres i alle forsøgene, vil denne algoritme kun vise lille afhængighed af de andre parametre. Da chirp-z transformationen rent praktisk er implementeret med brug af tre FFT transformationer for hver chirp-z, vil brugen af denne til inversion af det to-dimensionale spektrum være mindst tre gange langsommere end brug af en almindelig to-dimensional FFT rutine. Dette ses på grafen.



Figur 9.38: Rekonstruktionstid som funktion af produktet MN.

Alle de implementerede algoritmer er blevet optimeret med hensyn til rekonstruktions hastighed. Det eneste sted der umiddelbart vil kunne foretages forbedringer er implementeringen af chirp-z transformationen, der ved brug af andre teknikker godt kan gøres hurtigere. Alle de viste tal, er målt ved afviklingen af programmerne på en 486DX4-100 MHz baseret computer med LINUX som operativ system. Alle programmerne er kompilet med GNU-C version 2.5.8, med hastigheds optimerings parameteren `-O2`.

9.9 Resumé

I dette kapitel er de udførte tests med de implementerede direkte rekonstruktions algoritmer blevet præsenteret og kommenteret. Der er blevet udført test med almindelige computer genererede fantomer, og fantomer der simulerer rigtigt opsamlede PET data. Der er blevet vist rekonstruktioner af rigtige data fra Rigshospitalets PET skanner.

Kapitel 10

Konklusion

I denne rapport er beskrevet opbygningen og implementeringen af algoritmer til rekonstruktion af PET data ved invers to-dimensional Radon transformation. De implementerede algoritmer er blevet testet både på kunstigt genererede data og rigtige PET data.

De implementerede algoritmer er repræsentative for de filtrerede tilbageprojektions metoder og Fourier metoderne. Ydermere er der implementeret en variant af en Fourier metode der benytter ulineær re-sampling af sinogrammet og chirp-z interpolation. Denne er kraftigt inspireret af *Linogram* metoden. Alle de implementerede rutiner er i stand til at udføre zoom i rekonstruktionen med valgfri samplings parametre, dog har Filtering after Backprojection lidt problemer med zoom.

Det er blevet vist at interpolationen i en Fourier metode er central for dennes rekonstruktions kvalitet. Ved brug af chirp-z interpolation er der opnået bedre rekonstruktioner end med de filterede tilbage projektions metoder vurderet både med et objektivt fejlmål, og ved en subjektiv visuel vurdering af de rekonstruerede billeder.

Selv om det konstateres at der målelig og visuel forskel på de rekonstruerede billeder fra de forskellige rekonstruktions algoritmer, er denne forskel minimal, og vil ingen praktisk betydning have for rekonstruktion af rigtige PET data, der må formodes at være støjfyldte, hvilket vil betyde mere for kvaliteten af billederne, end de forskelle der med fantomer har kunnet konstateres mellem algoritmerne.

Dermed vil de vigtigeste parametre for rekonstruktions algoritmer i praksis være hvorledes de rekonstruerer sinogrammer med støj, og deres rekonstruktions hastighed. Filtered Backprojection og Central Slice algoritmerne har vist ens rekonstruktions kvalitet på sinogrammer der simulerer rigtige PET data. De direkte Fourier metoder har det største hastigheds potentiale ved en ren software implementering, som benyttet i dette projekt. Fourier metoderne er dog meget mere komplicerede at implementere end den relativt simple Filtered Backprojection algoritme.

Bibliografi

[Blu68] L. I. Bluestein. A linear filtering approach to the computation of the discrete fourier transform. *1968 NEREM Rec.*, pages 218–9, 1968.

[Bro81] R. A. Brooks, V. J. Sanks et al. Design considerations for positron emission tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, BME–28(2):158–76, February 1981.

[Bru86] A. Bruce Carlson. *Communication Systems.* McGraw–Hill, 3 edition, 1986.

[Bud79] T. F. Budinger et al. Trends and prospects for circular ring positron cameras. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS–26(2):2742–45, April 1979.

[Cha86] B. Chan, M. Bargstrom et al. Scatter distribution in transmission measurements with positron emission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 10(2):296–301, March 1986.

[Cha93] P. Charbonnier et al. An adaptive reconstruction method involving discontinuities. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, pages 491–4, 1993.

[Con84] K. Conradsen. *En introduction til statistik*, volume 1A. IMSOR, IMM, DTU, DK2800 Lyngby, 5. edition, 1984.

[Dea93] S. R. Deans. *The Radon Transform and Some of Its Applications.* Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1993. Previously John Wiley & Sons Inc., 1983.

[DeG94] Timothy R. DeGrado et. al. Performance characteristics of a whole-body pet scanner. *The Journal of Nuclear Medicine*, 35:1398–406, August 1994.

[Dud84] D. E. Dudgeon and R. M. Merserau. *Multidimensional Digital Signal Processing.* Prentice Hall, 1984.

[Edh87] P. R. Edholm and G. T. Herman. Linograms in image reconstruction from projections. *IEEE transactions on Medical Imaging*, 6(4):301–7, December 1987.

[Fre94] R. Freifelder, J. S. Karp et al. Design and preformance of the head penn-pet scanner. *IEEE conference records, Nuclear Science & Medical Imaging*, 1994.

[Gro88] S. I. Grossman and W. R. Derrick. *Advanced engineering mathematics.* Harper & Row, New York, 1988.

[Gue93] T. M. Guerreroe et al. Evaluation and application of reprojection methods for 3d pet. *IEEE Conference records on Neuclear Science & Medical Imaging*, pages 1101–5, 1993.

[Han92] Per Christian Hansen. Regularization tools; a matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. Report UNIC-92-03, UNIC, UNIC, Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, 1992.

[Har78] Frederic J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 77(1), January 1978.

[Her80] G. T. Herman. *Image Reconstruction from Projections: The fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, 1980.

[Her93a] T. J. Herbert. A union of deterministic and stochastic methods for image reconstruction. *IEEE conference records, Nuclear Science & Medical Imaging*, pages 1317–21, 1993.

[Her93b] T. J. Herbert and S. S. Gopal. An improved filtered backprojection algorithm using pre-processing. *IEEE conference records, Nuclear Science & Medical Imaging*, pages 2068–72, 1993.

[Jai89] A. K. Jain. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, 1989.

[Kau93] Linda Kaufmann. Maximum likelihood, least squares, and penalized least squares for pet. *IEEE Transsctions on Medical Imaging*, 12(2), June 1993.

[Ker91] Brian W. Kernighan and Dennis M. Ritchie. *The C programming language*. Prentice Hall, 2 edition, 1991.

[Law93] P. Lawætz. *Moderne Fysik*. Polyteknisk Forlag, 2. edition, 1993.

[Lew83] Robert M. Lewitt. Reconstruction algorithms: Transform methods. *Proceedings of the IEEE*, 71(3):390–408, March 1983.

[Lou83] Alfred K. Louis and Frank Natterer. Mathematical problems of computerized tomography. *Proceedings of the IEEE*, 71(3):379–89, March 1983.

[Mac83] Albert Macovski. Physical problems of computerized tomography. *Proceedings of the IEEE*, 71(3):373–8, March 1983.

[Mag89] Maria Magnusson. *The Linogram Method for Image Reconstruction from Projections*. PhD thesis, Linköbings tekniska högskola, Dep. of Electrical Engineering, S-581 83 Linköbing, Sweden, 1989. Revised version 1993.

[Mah87] D. Kirkman Mahoney et al. A realistic computer-simulated brain phantom for evaluation of pet characteristics. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-6(3):250–7, September 1987.

[Mal92] A. Mallon and P. Grangeat. Three-dimensional pet reconstruction with time-of-flight measurement. *Physics in Medecine & Biology*, 37(3):717–29, 1992.

[Mat90] Samuel Matej and Ivan Balja. A high-speed reconstruction from projections using direct fourier method with optimized parameters — an experimental analysis. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(4):421–29, December 1990.

[Mer73] R. M. Mersereau. Recovering multidimensional signals from their projections. *Computer Graphics and Image Processing*, 1(4):179–95, December 1973.

[Mor91] Kevin J. Moraski and David C. Munson, Jr. Fast tomographic reconstruction using chirp-z interpolation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1991.

[Nat83] Nasir A. T. Natarajan. *Discrete–time signals and systems.* Prentice Hall, 1983.

[Oll93] J. M. Ollinger. Reconstruction-reprojection of transmission scans and the variance of pet images. *IEEE conference records, Nuclear Science & Medical Imaging*, pages 1696–9, 1993.

[O'S85] J. D. O'Sullivan. A fast sinc function gridding algorithm for fourier inversion in computer tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI–4(4), December 1985.

[O'S93] Finbarr O'Sullivan, Yudianto Pawitan and David Haynor. Reducing negativity artifacts in emmision tomography: Post-prossesing filtered backprojection solutions. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(4), December 1993.

[Ped92] Simon Boel Pedersen. *Signalanalyse I-III.* Electronics Institute, Technical University of Denmark, 1992. Lecture notes for DTU course 4231 (In danish).

[Pet81] T. M. Peters. Alogrithms for fast back– and re–projection in computed tomography. *IEEE Transactions on Neuclear Science*, NS–28(4):3641–3647, 1981.

[Pre92] William H. Press et al. *Numerical Recipes in C.* Cambridge University Press, 2. edition, 1992.

[Rab69] L. R. Rabiner and R. W. Schafer. The chirp–z transform algorithm. *IEEE transactions on Audio and Electroacoustics*, AU-17(2):86–92, 1969.

[Rad17] Johann Radon. Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. *Ber. Ver. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Phys. Kl.*, 69:262–77, April 1917. In german. English translation in S. R. Deans: The Radon Transform and Some of Its Applications.

[Rog87] J. G. Rogers, R. Harrop and P. E. Kinahan. The theory of three-dimensional image reconstruction for pet. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-6(3):239–43, September 1987.

[Ros82] A. Rosenfeld and A. C. Kak. *Digital Picture Processing*, volume 1. Academic Press, 2. edition, 1982.

[Sch89] Robert J. Schalkoff. *Digital Image Processing and Computer Vision.* John Wiley & Sons, 1989.

[Sha94] L. Shao, J. S. Karp and P. Countryman. Practical considerations of the wiener filtering technique on projection data for pet. *IEEE conference records, Nuclear Science & Medical Imaging*, 1994.

[She82] L. A. Shepp and Y. Vardi. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-1(2):113–22, October 1982.

[Tof94a] P. Toft. Interpolation in signals and spectra. Technical report, Electronics Institute, 1994.

[Tof94b] Peter Toft. Radontransformation. Lecture Note for DTU course 4235, 2677, Electronics Institute, Technical University of Denmark, Electronics Institute, Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Jan. 1994. In danish.

[Tof95] P. Toft. Radonana: A c-based package for analytically based radon transformation. Technical report, Electronics Institute, January 1995.

[Tru87] H. J. Trussell, H. Orun–Ozturk and M.R. Civanlar. Errors in reprojection methods in computerized tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-6(3):220–7, September 1987.

[Xu,93] Xiao-Liang Xu, Jeih-San Liow and Stephen C. Strother. A novel iterative reconstruction algorithm for emission computed tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, pages 503–6, 1993.

Appendix A

Chirp-z transformationen

I dette appendix vil dels blive beskrevet baggrunden for at indføre chirp-z transformationen, dels den bagved liggende teori. Et eksempel på brug af chirp-z transformationen til interpolation vil blive vist.

A.1 Z-transformationen

Baggrunden for at bruge chirp-z transformationen i de implementerede programmer, er et ønske om at kunne evaluere en funktion langs en mere fleksibel kurve i z-planet end blot ækvidestant samplede punkter på enhedscirklen. Dette problem kan løses med den almindelig diskrete z-transformation. Chirp-z transformation er blot den hurtige metode at gøre dette på.

Den generelle z-transformation af en N punkts sekvens kan skrives som en sum:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}, \tag{A.1}$$

Hvis X ønskes evalueret for et endelig antal punkter langs en generel kontur på enhedscirklen, kan (A.1) skrives som

$$X(k) = X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n}, \tag{A.2}$$

hvor den kontur der vil blive undersøgt på har formen

$$z_k = AW^{-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{A.3}$$

hvor A og W er komplekse tal af formen

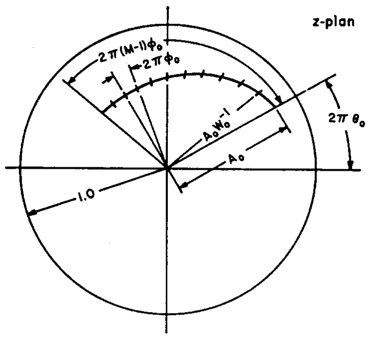
$$A = A_0 e^{j2\pi\theta_0} \tag{A.4}$$

og

$$W = W_0 e^{j2\pi\phi_0}. \tag{A.5}$$

Hvis værdierne $A = 1$, $M = N$ og $W = \exp(-j2\pi/N)$ bruges, fås en evaluering af den almindelige DFT. På figur A.1 er en afbilding af konturen i z-planet. Konturen vil begynde i punktet $z = A$, og vil afhængigt af værdien af W, enten nærme sig, eller fjerne sig fra origo. Hvis $W = 0$, vil kurven følge en cirkelbue. Vinkel afstanden mellem samplepunkterne er $2\pi\phi_0$.

Den direkte evaluering af (A.2), vil have en kompleksitet proportionalt med MN parallelt med DFT'en, da der ikke længere er den symmetri i $exp(j2\pi/N)$, som FFT'en udnytter. Udregningen af den diskrete z-transformation langs konturen i (A.3) kan dog udføres hurtigere ved at gøre brug af den hurtige Fourier transformation.



Figur A.1: Den kontur i z-planet z-transformationen evaluerer punkter på.

A.2 Chirp-z transformationen

Formel (A.2) evalueret langs (A.3) bliver

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)A^{-n}W^{nk}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{A.6}$$

der ved direkte udregning vil kræve NM komplekse additioner og multiplikationer. Ved at anvende Bluesteins [Blu68] substitution

$$nk = \frac{n^2 + k^2 - (k-n)^2}{2} \tag{A.7}$$

for eksponenten for W i (A.6), bliver udtrykket

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)A^{-n}W^{n^2/2}W^{k^2/2}W^{-(k-n)2}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{A.8}$$

Dette udtryk ser ikke mindre kompliceret ud, men hvis man deler udregningen op i tre seperate operationer, bliver meningen klar:

1. Der dannes en ny sekvens $y(n)$, ved at vægte $x(n)$ som følger

$$y(n) = x(n)A^{-n}W^{n^2/2}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{A.9}$$

2. $y(n)$ foldes med sekvensen $v(n)$ defineret som

$$v(n) = W^{-n^2/2} \tag{A.10}$$

for at give sekvensen $g(k)$,

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)v(k-n), \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{A.11}$$

3. Dernæst ganges $g(k)$ med $W^{k^2/2}$ for at få $X(k)$

$$X(k) = g(k)W^{k^2/2}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{A.12}$$

Fordelen ved denne notation bliver klar, når der ses på beregningskompleksitet. For at udføre første og tredie trin kræves N og M multiplikationer. For at udregne det andet trin bruges FFT'er til at udføre foldningen, og vil derfor have en kompleksitet på $(N + M)log(N + M)$. Dog med den begrænsning, at hvis $N + M$ ikke har en længde der kan bruges i en FFT, må sekvensen paddes med nuller.

Opsummering af fordele ved chirp-z fremfor FFT:

1. Antallet af tids samples behøver ikke at være lig antallet af frekvens samples.

2. Hverken M eller N har restriktioner på deres størrelse.

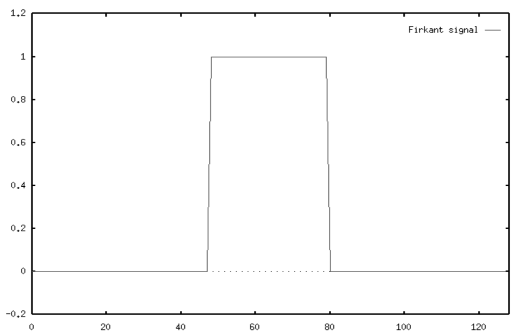
3. Vinkel afstanden mellem samplepunkterne på konturen z_k er kan vælges vilkårligt.

4. Konturen behøver ikke at være en cirkel. Startpunktet z_0 kan kan vælges vilkårligt.

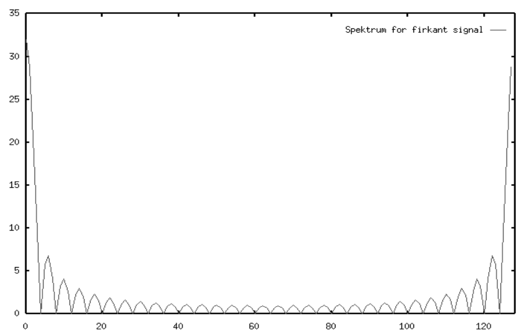
A.3 Interpolation med chirp-z algoritmen

Chirp-z transformationen er dermed i stand til at udføre perfekt sinc interpolation i signaler og spektre i forbindelse med transformation fra tidsdomæne til frekvensdomæne og omvendt. Det er denne egenskab der udnyttes til at opnå zoom i output billedet i forbindelse med chirp-z invertering af spektret som beskrevet i kapitel 6.

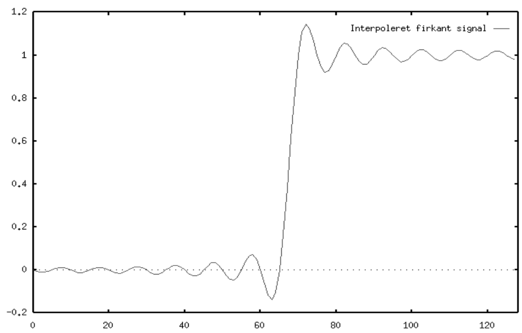
På figur A.2 ses et diskret firkantsignal. Dette Fourier transformeres med en FFT rutine for at få spektret som på figur A.3. Dette spektrum er derefter chirp-z transformeret med den implementerede chirp-z algoritme, med parametrene $\phi_0 = 0.2/N$ og $\theta_0 = 34/N$, hvor N er antallet af samples i tidssekvensen, i dette tilfælde $N = 128$. Det resulterende signal ses på figur A.4. Som det ses er der zoomet ind på et mindre område end i det oprindelige signal, og udført sinc interpolation med 5 punkter mellem hvert af de oprindelige samplepunkter.



Figur A.2: Firkantsignal.



Figur A.3: Spektrum for firkantsignal.



Figur A.4: Interpoleret firkant signal.

Appendix B

Data for fantomer

Her vil de fire geometriske primitiver der har dannet baggrund for de anvendte fantomer blive beskrevet. Data for opbygningen af de fire fantomer vil blive præsenteret.

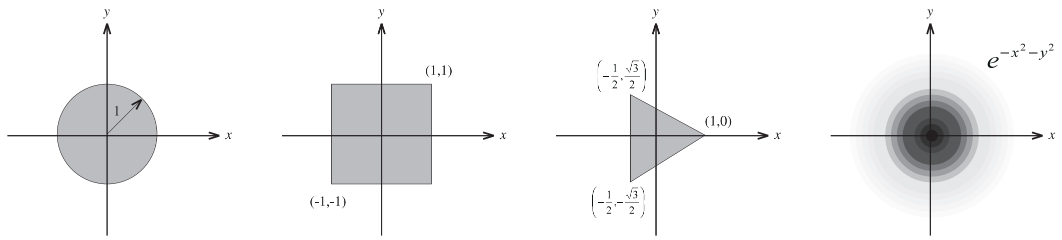
B.1 Geometriske primitiver

Ved hjælp af det udviklede `radonana` program (se appendix F) er det muligt at generere analytisk udregnede Radon transformations-par af fire forskellige geometriske primitiver. Disse er:

- Cirkel,
- Trekant,
- Firkant,
- Gauss-klokke.

De objekter der bruges i fantomerne er udgaver af disse grundfunktioner, transformeret geometrisk ved hjælp af de i kapitel 2 beskrevne transformationer. Definitionen af de fire grundfunktioner er vist grafisk på figur B.1. De transformationer der kan bruges på objekterne er

- Skalering i to dimensioner,
- Rotation omkring objektets center,
- Translation.



Figur B.1: Geometriske primitiver, der analytisk kan dannes Radon transformations-par af. Fra venstre med højre: Cirkel, firkant, trekant og Gauss-klokke.

Ud over dette skal objektet have en styrke i fantomet. På de følgende sider er `radonana` ini-filer for de fire brugte fantomer. Objekterne defineres nederst i hver fil med `ShapeX=`, hvor `X` er objektets nummer. For hvert opbjekt skal angives følgende parametre

`type`: Vælger objekt type: 1=cirkel, 2=rektangel, 3=trekant, 4=Gauss-klokke.

`a`: Skalering i x-retningen.

`b`: Skalering i y-retningen.

`x0`: Translation i x-retningen.

`y0`: Translation i y-retningen.

`phi`: Drejning omkring objektets center, i radianer mod uret.

`power`: Objektets styrke i fantomet.

Det færdige fantom er summen af alle de transformerede objekters styrker for alle punkter. Sinogrammet for fantomet bliver ligeledes summen af den Radon transformerede for hvert af objekterne i alle punkter. Herunder følger en oversigt over ini-filerne for de fire konstruerede fantomer, deres placering på disketten, og udskriftens placering i dette appendix:

Fil-navn	**Placering**	**Beskrivelse**	**Udskrift**
`man.ini`	`/radonana`	Generering af *man* fantomet	side 1
`phantom.ini`	`/radonana`	Generering af *phantom* fantomet	side 2
`radial.ini`	`/radonana`	Generering af *radial* fantomet	side 3
`spiral.ini`	`/radonana`	Generering af *spiral* fantomet	side 4

Appendix C

Program til direkte rekonstruktion

I dette appendix, vil der blive givet en kort beskrivelse af brugen af `iradon` programmet, udviklet til direkte rekonstruktion af PET billeder i forbindelse med første del af dette projektet.

C.1 Ini-filen

Programmet til direkte rekonstruktion, `iradon` er baseret på indlæsning af alle parametre vedrørende kørslen fra en initialiserings fil, hvori der skrives forskellige fil-navne og parametre. For at lette brugen af programmet, er der blevet lavet en X-Windows 'skal' `Iradon_Shell`, hvor disse parametre kan indtastes. Denne kører under LINUX, ved hjælp af TCL/TK kommandofortolkeren *wish*. Tilsvarende fortolkere findes også til HP-9000 og Windows 3.1, hvorfor programmet også ville kunne afvikles direkte på disse platforme. På figur C.1 er vist skærmbilledet for dette program.

C.2 Parametre

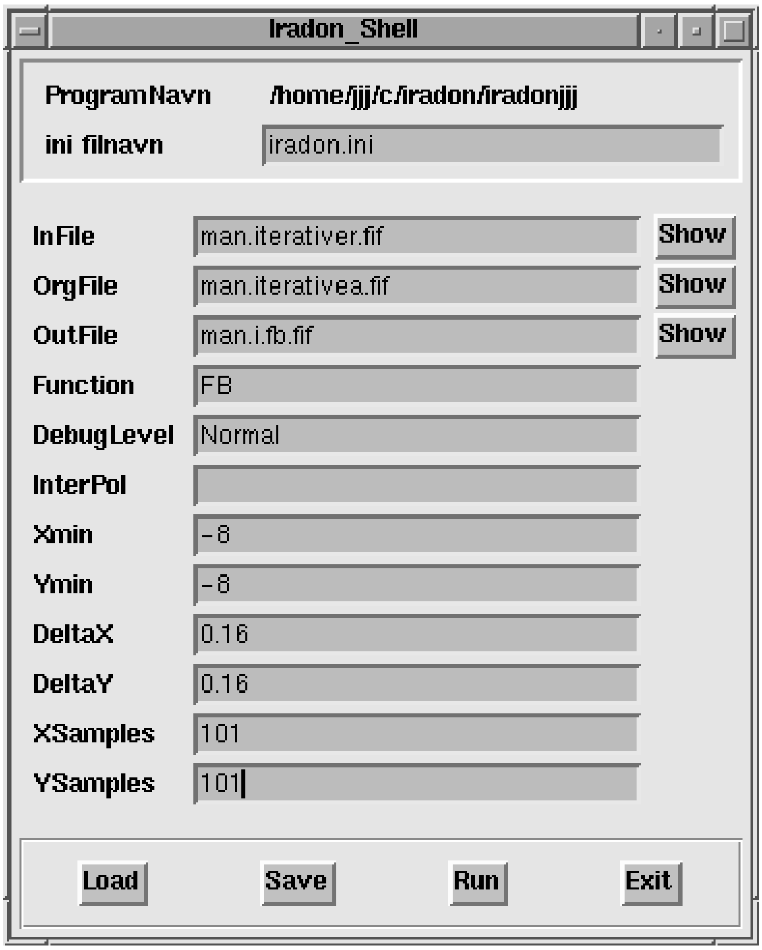
Herunder gives en kort beskrivelse af de parametre der kan bruges i programmet. Disse indtastes i `Iradon_Shell` som vist på figur C.1.

`InFileName` Input fil, sinogram for det billede der skal rekonstrueres. Billedet kan vises med 'show' knappen.

`OrgFileName` Navn på referencebilledet. Hvis dette billede er oplyst, bliver samplingsparametrene for outputbilledet sat lig dette billedes. L_2 mål bliver udregnet med dette billede som referencebillede. Billedet kan vises med 'show' knappen.

`OutFileName` Navn det rekonstruerede billede skal gemmes under. Efternavnet bestemmer fil-formatet. Billedet kan efter rekonstruktionen vises med 'show' knappen.

`Function` Rekonstruktions algoritme. Der kan vælges mellem `FB` og `BF` for Filtered Backprojection eller Filtering after Backprojection. Af Fourier metoder kan vælges mellem `CNF`, `CNC`, `CBF`, `CBC` eller `CC`. Det sidste bogstav indikerer hvilken måde spektret skal transformeres med, `C` for chirp-z invertering eller `F` for Fourier invertering. `CN` er Central Slice med nærmeste nabo interpolation, `CB`, er med bi-lineær interpolation. `C` alene er med chirp-z ulineær re-sampling af sinogrammet.



Figur C.1: Skærmbillede for `Iradon_Shell`.

`Interpol` Algoritme specifik parameter for Filtered Backprojection rutinen. Bestemmer om der skal udføres interpolation med Fourier transformationen efter filtreringen. 0 er ingen interpolation. Et positivt heltal, bestemmer hvor mange gange spektret skal udvides før tilbagetransformation, for at få bedre spatial opløsning.

`DebugLevel` Bestemmer hvor meget information om kørslen der ønskes. Kan sættes til `Normal`, `Silent`, `Hardcore` eller `Debug`.

`Xmin` Hvis intet referencebillede er oplyst, bliver samplingsparametrene for output billedet taget fra denne og de følgende parametre. Bestemmer mindste x-koordinat.

`Ymin` Bestemmer mindste y-koordinat.

`DeltaX` Samplings afstanden i output billedet i x-retningen.

`DeltaX` Samplings afstanden i output billedet i y-retningen.

`XSamples` Antallet af samples i x-retningen.

`YSamples` Antallet af samples i y-retningen.

Appendix D

‘iradon’ program filer

Herunder følger en kort oversigt over de programfiler der er udvilket til del I af projektet, deres placering på den medfølgende diskette og udskriftens placering i dette appendix. Program udskrifterne er globalt nummereret fortløbende i nederste højre hjørne. Inden for hver enkelt fil er en fortløbende side nummerering i øverste højre hjørne. En LaTeX-formatteret udskrift af funktionsbeskrivelserne for de enkelte funktioner findes i appendix E.

Program	**Placering**	**Beskrivelse**	**Udskrift**
`Makefile`	`/iradon`	Makefil til `iradon` programmet	side 1
`iradon.h`	`/tools`	Prototyper og globale variable	side 2
`iradoninc.h`	`/tools`	Til indlæsning af eksterne programmer	side 3
`iradon.c`	`/iradon`	Hoved program	side 4
`ingtools.h`	`/tools`	Header til `imgtools.c`	side 11
`analyze.h`	`/tools`	Header til `imgtools.c`	side 13
`imgtools.c`	`/tools`	Billedbehandlings bibliotek	side 14
`calc.h`	`/tools`	Header til `calc.c`	side 35
`calc.c`	`/tools`	Udregnings bibliotek	side 36
`eval.h`	`/tools`	Header til `eval.c`	side 55
`eval.c`	`/tools`	Evaluerings bibliotek	side 56
`misc.h`	`/tools`	Header til `misc.c`	side 60
`misc.c`	`/tools`	Diverse funktioner	side 61
`iradon.ini`	`/iradon`	Eksempel på ini-fil til `iradon`	side 69
`Iradon_Shell`	`/ishell`	Shell program til `iradon`	side 70
`gif_lib.h`	`/tools`	Gif bibliotek	
`gif_hash.h`	`/tools`	Gif bibliotek	
`gif_hash.c`	`/tools`	Gif bibliotek	
`dgif_lib.c`	`/tools`	Gif bibliotek	
`egif_lib.c`	`/tools`	Gif bibliotek	
`gif_err.c`	`/tools`	Gif bibliotek	

De brugte rutiner til lagring og indlæsning af `gif` billeder, er alle fra public-domain biblioteket `gif-lib`, version 1.1 (1990), skrevet af Gershon Elber. Disse filer er ikke udskrevet.

Appendix E

Funktionsbeskrivelser for ‘iradon’

På de følgende sider er en LaTeX-formatteret udskrift af de funktionsbeskrivelser der findes i programmerne til direkte rekonstruktion.

Appendix F

Diverse program filer

Under dette projekt er der udover hovedprogrammet `iradon`, til direkte rekonstruktion, blevet udviklet andre programmer, dels til brug ved testning af hovedprogrammet. Disse er ikke lavet så brugervenlige som hoved programmet. Der vil her blive givet en kort oversigt over disse programmer deres placering på disketten, og udskriftens placering i dette appendix. Der er ikke lavet LaTeX-formatterede funktions beskrivelser til disse programmer.

Program	**Placering**	**Beskrivelse**	**Udskrift**
`RMakefile`	`/radonana`	Makefil til `radonana` programmet	side 1
`radonana.c`	`/radonana`	Analytisk Radon transformation	side 2
`gasdev.c`	`/radonana`	Bruges af `radonana.c`	side 10
`ran1.c`	`/radonana`	Bruges af `radonana.c`	side 11
`radonana.ini`	`/radonana`	Eksempel på ini-fil til `radonana`	side 12
`radon.nb.c`	`/radon_n`	Numerisk Radon transformation	side 13
`radon.n.ini`	`/radon_n`	Eksempel på ini-fil til `radon.nb`	side 17
`PMakefile`	`/poisson`	Makefile til `poisson.c`	side 18
`poisson.c`	`/poisson`	Poisson fordelte sinogrammer	side 19
`ran1.c`	`/poisson`	Bruges af `poisson.c`	side 21
`poidev1.c`	`/poisson`	Bruges af `poisson.c`	side 22
`gammln.c`	`/poisson`	Bruges af `poisson.c`	sice 23
`CMakefile`	`/clat`	Makefil til `clat.c`	side 24
`clat.c`	`/clat`	LaTeX-funktionsbeskrivelser	side 25

F.1 Beskrivelse af programmer

I dette afsnit vil der blive givet en kort beskrivelse af hver af de programmer der er inkluderet i dette appendix.

`radonana` Program til generering af Radon transformations-par ved hjælp af den analytiske Radon transformation. Se `radonana.ini` i listningen. En nærmere beskrivelse af data for fantomerne findes i appendix B. En beskrivelse af genereringen af analytiske fantomer kan findes i Toft [Tof95].

`poisson` Program til at generere et sinogram som en individuel Poisson-proces i hvert punkt, ud fra et andet givet sinogram. Bruges til at simulere sinogrammer med varierende tælletal.

`radon.nb` Program til numerisk radon transformation af et diskret billede. Bruger lineær interpolation for at få bedre kvalitet af sinogrammet. Er ikke koblet på funktions bibiotekerne. Læser kun `.DAT` filer. Se `radon.n.ini` i listningen.

`clat` Dette program er brugt til at generere de LaTeX-formatterede funktions oversigter der findes i appendix E. Ved at skrive headerene til funktionerne som vist i udskrifterne for `iradon` programmerne, kan en formatteret liste med indholdsfortegnelse genereres med dette program.