2D og 3D invers Radon transformation til PET

Jesper James Jensen

Frembringelse og tolkning af PET billeder

Peter Alshede Philipsen

Abstract

Dette projekt omhandler metoder til at rekonstruere billeder optaget med PET skannere ved hjælp af den inverse Radon transformation. Der eksisterer forskellige metoder hvormed denne inversion kan foretages. Første del af projektet omhandler vurdering og sammenligning af forskellige typer af direkte rekonstruktionsmetoder. Anden del af projektet omhandler vurdering og sammenligning af tre typer iterative rekonstruktionsmetoder, der kan bruges til to- eller tre-dimensional rekonstruktion. Disse er implementeret og testet to-dimensionalt. Tredie del af projektet omhandler preprocessering af de opsamlede data, og postprocessering af de rekonstruerede billeder for at forbedre kvaliteten af disse.

Vejledere: Lars K. Hansen og Peter A. Toft

28. Februar 1995
Elektronisk Institut
Danmarks Tekniske Universitet

Forord

Denne rapport er resultatet af to eksamens projekter, *2D og 3D invers Radon transformation til PET* og *Frembringelse og tolkning af PET billeder*. Disse projekter er udført i perioden 1/9–94 til 28/2–95 ved Elektronisk Institut på DTU med Lars K. Hansen og Peter A. Toft som vejledere.

Rapporten er delt op i tre dele. Første del, *Direkte metoder til rekonstruktion af PET billeder*, er udført som et samarbejde mellem Jesper J. Jensen og Peter A. Philipsen, og omhandler implementering og testning af to-dimensionale metoder til rekonstruktion af PET billeder. Anden del af rapporten, *Iterative metoder til rekonstruktion af PET billeder*, omhandler implementering og testning af iterative metoder der kan bruges til rekonstruktion af to- og tre-dimensionale PET billeder. Denne del er udført af Jesper J. Jensen. Tredie del, *Preprocessering og postprocessering af PET billeder*, omhandler implementering af pre- og postprocesserings metoder til at forbedre kvaliteten af de rekonstruerede PET billeder. Denne del er udført af Peter A. Philipsen.

De tre dele af rapporten er side nummereret individuelt. Formler og figurer er nummereret fortløbende i hvert kapitel. Figur 2.1 er første figur i kapitel 2, og formel (3.19) er formel nummer 19 i kapitel 3. Henvisninger til bibliografien er angivet med efternavnet på hovedforfatteren og en henvisning i kantede paranteser som Rogers [Rog87]. Fodnoter angives med høj skrift som[1]. Disse er fortløbende for hver kapitel. Fodnoten er altid placeret nederst på den side der henvises til den. Filnavne og program variable er skrevet med courier skrift som `value[n]`. Appendices er nummereret med store bogstaver i alfabetisk rækkefølge startende fra A. Programudskrifter er side nummereret individuelt i hvert af de respektive appendices, og en indholdsfortegnelse findes forrest i appendixet. Rapportens dele og appendices er opdelt med et stykke gråt papir imellem, for lettere at kunne lokalisere starten på disse.

Da projektets fysiske rammer har været henlagt til neurologisk afdeling på Rigshospitalet, vil vi gerne takke Hans Johanneson, Karin Stahr, Claus Svarer og Søren Holm som har været med til at gøre vores ophold der meget behageligt.

En stor tak til Michael C. Jensen, Tonny A. Jensen, Ulla Lebech og Bente M. James for kritisk gennemlæsning af rapporten og forslag til forbedringer.

Rigshospitalet, 27. februar 1995

Jesper James Jensen, (Cs937084)

Peter Alshede Philipsen, (C898685)

Del I

Direkte metoder til rekonstruktion af PET billeder

Indholdsfortegnelse

Kapitel 1

Indledning

Denne del af rapporten omhandler direkte metoder til rekonstruktion af data opsamlet med *Positron Emission Tomografi* (PET) skannere. På neurologisk afdeling på Rigshospitalet er opstillet en General Eletric *Advance* PET-skanner. Denne skanner er en fjerde generations PET skanner, der bygger på principper udviklet i forbindelse med de første *Computerized Tompgraphy* (CT) skannere. PET- og CT-skannere er i stand til at diagnosticere indre organer uden kirurgiske indgreb. En af mulighederne med PET skanning er studier af hjernen, det er f.eks. muligt at diagnosticere hjerne-tumorer og den demens-fremmende Alzheimers sygdom. På Rigshospitalet forskes især i hjernecentrenes aktivitet. Hjernens aktivitet under forskellige stimuli ønskes bestemt for at kunne kortlægge de enkelte centres funktion.

Figur 1.1: *Advance* PET skanner fra General Electric.

Skanning med en PET skanner sker ved hjælp af et injiceret radioaktivt materiale i det objekt der skal undersøges. Det radioaktive materiale udsender positroner som smelter sammen med elektroner, og udsender parrede fotoner. Disse fotoner kan detekteres, og udfra disse data kan et billede over aktiviteten genskabes. På grund af en PET skanners fysiske udformning og fotonernes bevægelse ved henfaldene, kan det vises at der kan bruges en speciel matematisk transformation kaldet *Radon transformationen*[1] til at beskrive sammenhængen mellem foton detektionerne og en to-dimensional repræsentation af intensiten i det undersøgte objekt.

[1]Beskrevet af den tyske matematiker J. Radon og har ikke noget at gøre med grundstoffet radon.

Radon transformations anvendelser er mange, og den bruges indenfor mange områder. Indenfor lægevidenskaben benyttes den desuden i forbindelse med ultralyd, NMR-skanning (Nuclear Magnetic Resonance). Radon transformationen finder også anvendelse indenfor områder som seismik, astronomi og optik (se Deans [Dea93]).

I denne rapport vil der blive givet en gennemgang af Radon transformationen og nogle af dens egenskaber. En gennemgang af en PET skanners opbygning og virkemåde vil blive præsenteret, og sammenhængen med Radon transformationen vil blive vist. Til rekonstruktion af billeder over aktiviteten i et objekt, skal bruges den inverse Radon transformation. Denne kan implementeres ved hjælp af forskellige algoritmer. De mest brugte rekonstruktions algoritmer i dag vil kort blive beskrevet.

Der er i dette projekt valgt at implementere et repræsentativt udsnit af de såkaldte *direkte* rekonstruktionsmetoder. De implementerede algoritmer vil blive gennemgået og testet ved hjælp af kunstigt genererede testdata, da det giver mulighed for en bedre vurdering af de enkelte algoritmers kvalitet. Kunstige testdata kan fremstilles analytisk udfra egenskaber ved Radon transformationen, der også vil blive gennemgået. Data fra Rigshospitalets PET skanner vil også blive rekonstrueret. Disse rekonstruktioner vil danne grundlag for en sammenligning og vurdering af de implementerede algoritmer.

Kapitel 2

Radon transformationen

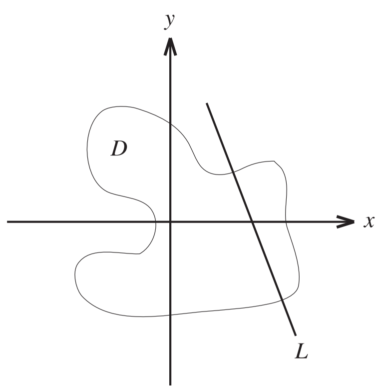
I dette kapitel vil den matematiske baggrund for den to-dimensionale Radon transformation blive gennemgået. Visse vigtige egenskaber for denne vil blive illustreret. Den analytiske Radon transformation vil blive introduceret.

2.1 Definition af Radon transformationen

Lad (x, y) være koordinater i et to-dimensionalt plan, og lad en vilkårlig funktion f være defineret i et område D af $\mathbf{R}^2$. Hvis en linie L er en vilkårlig linie i planet vil den afbildning, der er defineret ved linieintegralerne af f langs alle eksisterende linier L i planet, være den to-dimensionale Radon transformation af f, således at

$$\check{f} = \mathcal{R}f = \int_L f(x, y)\, ds, \tag{2.1}$$

hvor ds er en inkrementering i længde langs L. Domænet D, kan inkludere hele planet eller et afgrænset område som på figur 2.1. Denne afbildning og dens inverse, blev af den tyske matematiker Johan Radon beskrevet indgående i en artikel fra 1917 [Rad17]. Radon viste, at hvis f er kontinuert, så kan $\mathcal{R}f$ entydigt bestemmes ved at integrere langs alle linier L. Ligeledes kan f findes hvis $\check{f}$ er kontinuert.

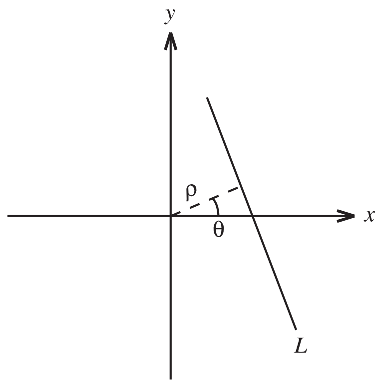


Figur 2.1: Linie L igennem området D.

Denne originale beskrivelse af Radon transformationen, kan blive mere anvendelig ved at introducere en mere specifik beskrivelse af integrationen langs alle linier L. En ret linie i planet kan beskrives af to parametre, afstanden ρ fra origo, og vinklen θ i forhold til x-aksen. Med denne parameterbeskrivelse, kan en vilkårlig linie L, som vist på figur 2.2, defineres som

$$L(\rho, \theta) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \rho = x \cos\theta + y \sin\theta\}. \tag{2.2}$$

Bruges denne liniebeskrivelse, bliver Radon transformationen i formel (2.1) afhængig af de



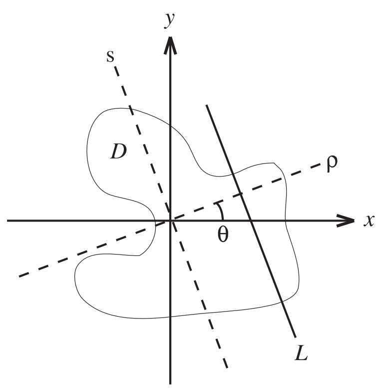
Figur 2.2: Linie L beskrevet med parameterne ρ og θ.

to parametre ρ og θ. Dette indikeres entydigt ved at skrive Radon transformationen som en funktion af de to variable, som

$$\check{f}(\rho, \theta) = \mathcal{R}f = \int_{L(\rho,\theta)} f(x, y) ds. \tag{2.3}$$

Hvis $\check{f}(\rho, \theta)$ er defineret for alle ρ og θ, er $\check{f}(\rho, \theta)$ den to-dimensionale Radon transformation af $f(x, y)$, der transformerer denne fra det spatiale domæne (x, y) over i Radon domænet udspændt af ρ og θ.

For at få Radon transformationen på en mere direkte brugbar form, indføres et nyt koordinatsystem (ρ, s), roteret vinklen θ i forhold til (x, y), som vist på figur 2.3. Relationen mellem de to koordinatsystemer, kan ved hjælp af en rotationsmatrix skrives som



Figur 2.3: Linien fra figur 2.2 vist i forhold til originalt og roteret koordinatsystem.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ s \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

hvorefter Radon transformationen ved indsættelse i formel (2.3), kan skrives som

$$\check{f}(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho\cos\theta - s\sin\theta, \rho\sin\theta + s\cos\theta)\, ds. \tag{2.5}$$

Ved indførsel af Dirac's deltafunktion, kan formel (2.5) skrives på en mere bekvem måde, da deltafunktionen kan bruges til at udvælge integrationsvejen, langs linien defineret i formel (2.2) som

$$\check{f}(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(\rho - x\cos\theta - y\sin\theta)\, dx\, dy. \tag{2.6}$$

Denne måde at skrive Radon transformationen på viser tydeligere hvorledes en Radon transformation kan udføres på en to-dimensional funktion. Det ses at for hvert ρ og θ, integreres der op i $f(x,y)$ i de punkter hvor deltafunktionens argument er lig nul, hvilket netop er på linien beskrevet med $L(\rho,\theta)$.

2.1.1 Parameterområde

Det bemærkes, at for vilkårlige ρ og θ, vil $L(\rho,\theta)$ og $L(-\rho,\theta+\pi)$ repræsentere den samme linie i planet, således at

$$\check{f}(\rho,\theta) = \check{f}(-\rho,\theta + (2p+1)\pi), \qquad p \in \mathbf{Z}. \tag{2.7}$$

Dette betyder, at der er en frihedsgrad i valg af parameterområde for $\check{f}$. Hvis ρ begrænses til positive værdier, kan θ variere over 2π, således at

$$0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq \rho \leq \rho_{max}. \tag{2.8}$$

Hvis negative værdier inkluderes i ρ, kan θ begrænses til at variere over π som

$$0 \leq \theta < \pi, \qquad -\rho_{max} \leq \rho \leq \rho_{max}. \tag{2.9}$$

I praksis vælges gerne parameterområdet beskrevet ved formel (2.9) til at beskrive et Radon domæne med, da dette harmonerer med den måde rekonstruktions algoritmerne er opbygget på. Det er ligeledes den beskrivelse der vil blive brugt igennem denne rapport.

2.2 Sinogrammet

En grafisk repræsentation af et Radon domæne har i litteraturen fået betegnelsen et *sinogram*, grundet den egenskab ved Radon transformationen at et punkt i (x,y)-planet bliver transformeret over i en sinus kurve i Radon domænet (ρ,θ).

Et punkt i planet placeret i (x_0,y_0), kan ved hjælp af deltafunktioner beskrives som

$$f(x,y) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0), \tag{2.10}$$

der ved hjælp af formel (2.6) Radon transformeres til

$$\begin{aligned}\check{f}(\rho,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(\rho - x\cos\theta - y\sin\theta)\, dx\, dy & (2.11)\\ &= \delta(\rho - x_0\cos\theta - y_0\sin\theta). & (2.12)\end{aligned}$$

I Radon domænet (ρ,θ), giver dette et resultat forskelligt fra nul, når

$$\rho = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta. \tag{2.13}$$

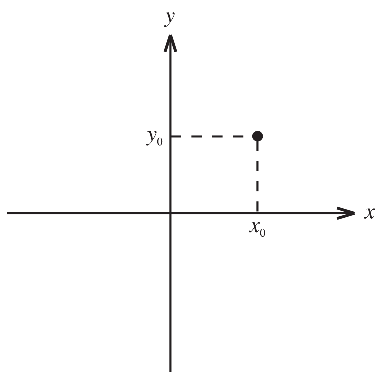
Hvis punktkilden i (x_0, y_0) udtrykkes med polære koordinater som

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \rho_0 \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

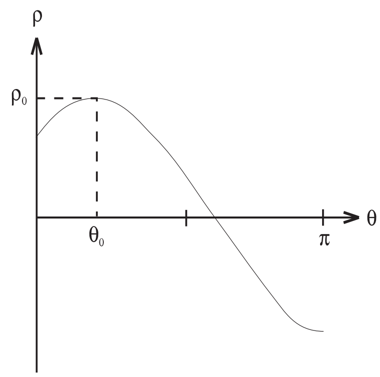
fås der ved indsættelse i formel (2.13)

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0[\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta] && (2.15)\\ &= \rho_0 \cos(\theta - \theta_0). && (2.16) \end{aligned}$$

Ud fra både formel (2.13) og (2.16) ses den sinus formede natur. På figur 2.4 er afbildet en punkt kilde i (x_0, y_0), på figur 2.5 er dens Radon transformerede afbildet — sinogrammet. Sinogrammer vil i denne rapport blive præsenteret som på figur 2.5 med θ-aksen vandret, og ρ-aksen lodret, og med værdier repræsenterende det definerede parameterområde.



Figur 2.4: Punktkilde i (x_0, y_0).



Figur 2.5: Sinogram af punktkilde.

Alle ρ-værdierne for samme vinkel θ i et sinogram danner et én-dimensionalt billede gennem objektet for denne vinkel, og kaldes en *projektion*.

2.3 Egenskaber ved Radon transformationen

Herunder følger nogle grundlæggende egenskaber ved den lineære Radon transformation, som defineret i formel (2.6). Egenskaberne vil blive brugt i de efterfølgende kapitler.

2.3.1 Linearitet

Radontransformationen er en lineær transformation. Givet to funktioner f og g, samt to konstanter α_1 og α_2 haves

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\alpha_1 f + \alpha_2 g] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_1 f(x,y) + \alpha_2 g(x,y)]\,\delta(\rho - x\cos\theta - y\sin\theta)\,dx\,dy. && (2.17)\\ &= \alpha_1 \check{f}(\rho,\theta) + \alpha_2 \check{g}(\rho,\theta) && (2.18)\\ &= \alpha_1 \mathcal{R}f + \alpha_2 \mathcal{R}g. && (2.19) \end{aligned}$$

Således vil den Radon transformerede af en sum af funktioner, være lig summen af funktionerne Radon transformeret individuelt.

2.3.2 Rotation

Funktionen $f(x,y)$ udtrykkes i polære koordinater som $f(r,\phi)$. Lad g være en kopi af f, roteret ϕ_0 omkring origo som

$$g(r,\phi) = f(r,\phi-\phi_0). \tag{2.20}$$

Radon transformationen i polære koordinater, kan med f skrevet med polære koordinater som $f(r,\phi)$, skrives som

$$\check{f}(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} f(r,\phi)\,\delta(\rho - r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta)|r|\,d\phi\,dr. \tag{2.21}$$

Den Radon transformerede af g, fås derefter ved hjælp af (2.21) til

$$\begin{aligned}
\check{g}(\rho,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} f(r,\phi-\phi_0)\,\delta(\rho - r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta)|r|\,d\phi\,dr && (2.22)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} f(r,\tilde{\phi})\,\delta(\rho - r\cos(\theta-\tilde{\phi}-\phi_0))|r|\,d\tilde{\phi}\,dr && (2.23)\\
&= \check{f}(\rho,\theta-\phi_0) && (2.24)
\end{aligned}$$

hvor substitutionen $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$ er blevet brugt. Det ses, at den Radon transformerede vil blive roteret samme vinkel ϕ_0 som funktionen er roteret.

2.3.3 Translation

Lad g være en translateret kopi af f som

$$g(x,y) = f(x-x_0, y-y_0). \tag{2.25}$$

Den Radon transformerede af g bliver

$$\begin{aligned}
\check{g}(\rho,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0,y-y_0)\,\delta(\rho - x\cos\theta - y\sin\theta)\,dx\,dy && (2.26)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x},\tilde{y})\,\delta(\rho - x_0\cos\theta - y_0\sin\theta - \tilde{x}\cos\theta - \tilde{y}\sin\theta)\,d\tilde{x}\,d\tilde{y} && (2.27)\\
&= \check{f}(\rho - x_0\cos\theta - y_0\sin\theta, \theta), && (2.28)
\end{aligned}$$

hvor substitutionerne $\tilde{x} = x - x_0$ og $\tilde{y} = y - y_0$ er blevet brugt. Den Radon transformerede af en translateret funktion, vil kun få ændret ρ-koordinatet, med en størrelse svarende til den langs $L(\rho,\theta)$ foretagne parallelle forskydning for hver θ.

2.3.4 Skalering

Lad g være en skaleret kopi af f som

$$g(x,y) = f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right), \qquad a>0 \text{ og } b>0. \tag{2.29}$$

Den Radon transformerede af g bliver

$$\begin{aligned}
\check{g}(\rho,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\delta(\rho - x\cos\theta - y\sin\theta)\,dx\,dy && (2.30)\\
&= ab\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(\rho - ax\cos\theta - by\sin\theta)\,dx\,dy. && (2.31)
\end{aligned}$$

For at få deltafunktionen på samme form som i formel (2.6), skaleres denne med γ som

$$\begin{aligned}\breve{g}(\rho,\theta) &= \frac{ab}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta\left(\frac{\rho}{\gamma} - x\frac{a\cos\theta}{\gamma} - y\frac{b\sin\theta}{\gamma}\right)dx\,dy &(2.32)\\ &= \frac{ab}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(\tilde{\rho} - x\cos\tilde{\theta} - y\sin\tilde{\theta})\,dx\,dy &(2.33)\\ &= \frac{ab}{\gamma}\breve{f}(\tilde{\rho},\tilde{\theta}), &(2.34)\end{aligned}$$

hvor $\tilde{\rho}$ og $\tilde{\theta}$ findes ved at sætte deltafunktionens argumenter i formel (2.32) og formel (2.33) lig hinanden som

$$\cos\tilde{\theta} = \frac{a\cos\theta}{\gamma} \quad \text{og} \quad \sin\tilde{\theta} = \frac{b\sin\theta}{\gamma}. \tag{2.35}$$

Derefter kan γ findes, da

$$\cos^2\tilde{\theta} + \sin^2\tilde{\theta} = 1, \tag{2.36}$$

fås

$$\gamma^2 = a^2 cos^2\theta + b^2\sin^2\theta, \tag{2.37}$$

hvormed $\tilde{\rho}$ findes til

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}. \tag{2.38}$$

Af formel (2.35) findes

$$\tan\tilde{\theta} = \frac{a}{b}\tan\theta, \tag{2.39}$$

hvilket giver

$$\tilde{\theta} = \arctan\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right). \tag{2.40}$$

Den Radon transformerede af en skaleret distribution, findes ved hjælp af formel (2.38) og formel (2.40) til

$$\breve{g}(\rho,\theta) = \frac{ab}{\gamma}\,\breve{f}\left(\frac{\rho}{\gamma}, \arctan\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)\right), \qquad \gamma = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}. \tag{2.41}$$

Blot skal der dog gøres opmærksom på, at funktionen Arctan vil returnere værdier der ligger i intervallet $]-\pi/2;\pi/2[$, hvor θ skal ligge i intervallet $[0;\pi[$.

2.4 Analytisk Radon transformation

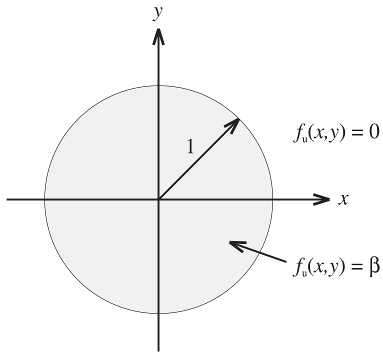
I de foregående afsnit er vist nogle grundlæggende egenskaber ved Radon transformationen, der kan bruges til at udføre analytisk Radon transformation af objekter dannet af enkle funktioner svarende til geometriske primitiver. Hvis et objekt kan beskrives som en sum af disse enkle funktioner, individuelt skaleret, roteret og translateret, kan den Radon transformerede af det samlede objekt findes ved brug af resultaterne i afsnit 2.3. Dette kræver blot, at den analytiske Radon transformation af hvert af de brugte simple grundfunktioner kan udregnes.

2.4.1 Radon transformation af en ellipse

Et eksempel på en simpel funktion der kan Radon transformeres analytisk, og ofte bruges i PET sammenhæng, er en ellipse. Ellipser kan dannes ud fra enhedscirklen ved hjælp af simple geometriske transformationer. Hvis f_u er en enhedscirkel med styrke β, som vist på figur 2.6, og defineret som

$$f_u(x,y) = \begin{cases} \beta \text{ hvis } x^2+y^2<1 \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}, \tag{2.42}$$

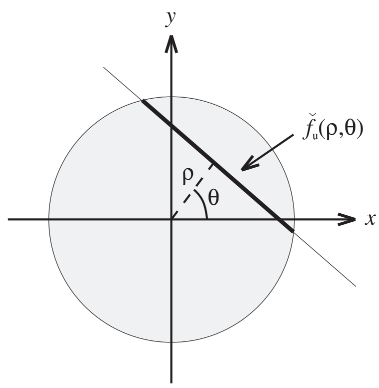
vil den analytisk Radon transformerede af f_u være længden af linien $L(\rho,\theta)$ igennem cirklen



Figur 2.6: Enhedscirkel med konstant værdi β.

vægtet med cirklens styrke, for hver ρ og θ, som vist på figur 2.7. Den Radon transformerede af en enhedscirkel, med styrke β bliver således

$$\check{f}_u(\rho,\theta) = \begin{cases} 2\beta\sqrt{1-\rho^2} \text{ hvis } \rho^2<1 \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}. \tag{2.43}$$

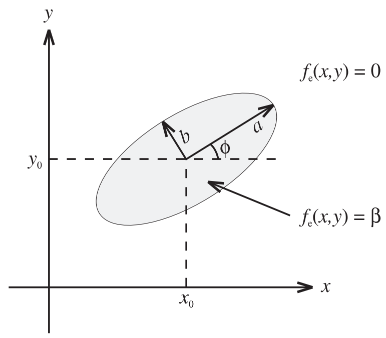


Figur 2.7: Radon transformation af en enhedscirkel.

En ellipse kan således Radon transformeres analytisk, da et udtryk for den Radon transformerede af en enhedscirkel kan findes. Ved at bruge resultaterne fra afsnit 2.3, fås et udtryk for den Radon transformerede af en ellipse $f_e(x,y)$, som vist på figur 2.8 til

$$\check{f}_e(\rho,\theta) = \begin{cases} 2\beta ab \dfrac{\sqrt{\rho_0^2-(\rho-x_0\cos\theta-y_0\sin\theta)^2}}{\rho_0^2} \text{ for } |\rho-x_0\cos\theta-y_0\sin\theta|<\rho_0 \\ 0 \text{ ellers} \end{cases} \tag{2.44}$$

$$\rho_0^2 = a^2\cos^2(\theta-\phi)+b^2\sin^2(\theta-\phi) \tag{2.45}$$



Figur 2.8: Ellipse konstrueret som geometrisk transformeret enhedscirkel.

2.4.2 Andre primitiver

For at kunne konstruere mere avancerede objekter der kan bruges til at teste de udviklede algoritmer for rekonstruktionsfejl og lignende, er der blevet implementeret rutiner, der kan udregne Radon transformationen analytisk for forskellige former for primitiver. Følgende primitiver er inkluderet:

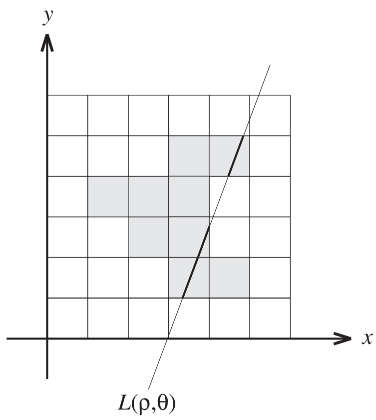
- Ellipse
- Rektangel
- Trekant
- Gauss klokke

I appendix B, er disse primitiver beskrevet nærmere. Der henvises til Deans [Dea93] og Toft [Tof95], for udledningerne.

2.5 Numerisk Radon transformation

Hvis ønsket er at Radon transformere en distribution der ikke kan beskrives ved et antal geometriske primitiver, men kan repræsenteres ved hjælp af et givet diskret billede, skannet eller tegnet, kan dette Radon transformeres ved en numerisk implementering af Radon transformationen.

Hvis det billede der skal Radon transformeres, tænkes opbygget af et diskret grid af pixels, hver repræsenterende middelintensiteten i det område den dækker over, vil Radon transformation af dette blot være en næsten direkte implementering af den lineære Radon transformation som i formel (2.6), hvis billedets samplings parametre er kendt. Som vist på figur 2.9, er dette blot en numerisk integration i et diskret billede, for de ρ og θ hvor Radon transformationen ønskes beregnet. Der henvises til Toft [Tof94b] for en nærmere beskrivelse af numerisk Radon transformation.



Figur 2.9: Diskret Radon transformation. Udføres som integration over linierne $L(\rho, \theta)$ for alle ρ og θ, vægtet med billedelementernes værdier.

2.6 Resumé

I dette kapitel er der blevet gjort rede for Radon transformationen, og nogle grundlæggende egenskaber ved denne. Disse er grundlaget for inversions algoritmerne som vil blive beskrevet i kapitel 4. Det er blevet vist hvorledes der kan foretage analytisk og numerisk Radon transformation ud fra de udledte formler, dette vil senere blive brugt til konstruktion af computer genererede fantomer. En diskussion omkring generering af fantomer findes i kapitel 8.

Kapitel 3

PET skanning

Dette kapitel indeholder en teoretisk gennemgang af de forhold der ligger til grund for PET- og CT skannere. Denne gennemgang vil udelukkende være to-dimensional. Forskellige fysiske forhold der vil forvolde problemer i forbindelse med rekonstruktion af billeder fra disse skannere vil blive belyst, såsom støj og usikkerheder. Der vil blive foretaget en kort gennemgang af den fysiske opbygning af en PET skanner. Gennemgangen vil tage udgangspunkt i CT-skanneren, da meget af teorien er fælles for de to typer skannere.

3.1 Computerized Tomography

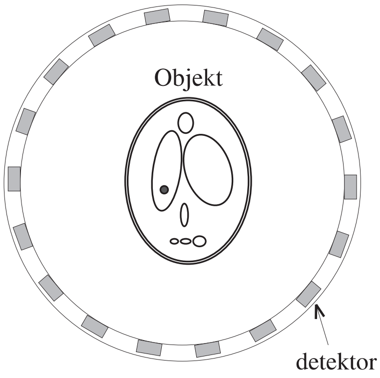
I følge Schalkoff [Sch89] er *Computerized Tomography* (CT), en beskrivelse af et N-dimensionalt objekt ved en serie af N-1 dimensionale projektioner. De billeder der skal rekonstrueres i dette projekt er to-dimensionale udsnit af tre-dimensionale objekter, *skiver* af disse. Derfor er der brug for en-dimensionale projektioner for en fuldstændig beskrivelse af objekterne. Projektionerne foretages langs rette linier i et plan. Der vil i gennemgangen kun blive set på objekter med begrænset fysisk udstrækning, hvilket vil give en begrænsning af antallet af projektioner.

Den projektion der bruges i computer tomografi udstyr, kan vises at være den to-dimensionale Radon transformation, der afbilder en to-dimensional funktion som et sæt én-dimensionale projektioner som vist i forrige kapitel.

Ordinære CT skannere er opbygget efter dette princip. Med en CT-skanner kan et objekts indre dæmpnings koefficient bestemmes, for dermed at kunne sige noget om den indre struktur af objektet. Dæmpningen bestemmes ved at sende gamma-stråler igennem objektet og måle dæmpningen af disse langs en række rette linier. Det kan vises, at den søgte to-dimensionale repræsentation af dæmpningen kan udregnes som den Radon transformerede af dæmpningen af de foretagede målinger langs rette linier, se f.eks. Deans [Dea93].

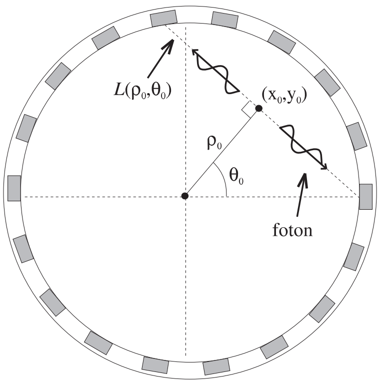
3.2 PET skannerens opbygning

En PET skanner er konstrueret til at måle en given indre strålingsaktivitet i et objekt. Dermed kan en række to-dimensionale billeder over strålingsaktiviteten i et tre-dimensionalt objekt dannes. Strålingsaktiviteten i en patient vil være koblet til blodgennemstrømningen, da radioaktive kerner injiceres i blodbanen. Stråling opstår ved positron-elektron annihilation, der danner parrede fotoner. Disse bevæger sig i diametralt modsatte retninger fra annihilations punktet. Detektionen sker med en ring af gamma-detektorer der omslutter objektet, som på figur 3.1.



Figur 3.1: Simplificeret model af en PET skanner med 18 detektorer.

Hvis der indføres et koordinatsystem (x, y) og med origo i centrum af detektorringen, kan linien svarende til et foton-pars bevægelse, beskrives med parametrene ρ og θ som i kapitel 2. Hvis det antages, at der i punktet (x_0, y_0) udsendes stråling med intensiteten $I(x_0, y_0)$, vil en del af fotonerne bevæge sig langs linien L beskrevet med parametrene (ρ_0, θ_0), hvor det gælder at punktet (x_0, y_0) ligger på linien L som illustreret på figur 3.2.



Figur 3.2: Stråling fra punktet (x_0, y_0) langs $L(\rho_0, \theta_0)$.

Under en skanning af varigheden ΔT_E, vil ikke kun kilden i punktet (x_0, y_0) bidrage med fotoner langs den aktuelle linie. De andre punktkilder på linien $L(\rho_0, \theta_0)$ vil også bidrage med fotoner. Det samlede antal detekterede fotonpar på linien, *tælletallet* $A(\rho_0, \theta_0)$ vil i middel[1] kunne beskrives som

$$A(\rho_0, \theta_0) \;=\; \Delta T_E \int_{L(\rho_0, \theta_0)} I(x, y)\, ds \tag{3.1}$$

hvor ds er en inkrementering i længderetningen langs $L(\rho_0, \theta_0)$. Ved at bruge den samme omskrivning af liniens parametre som i formel (2.4), fås med en ændring af integrations variablene

$$\begin{aligned} A(\rho_0, \theta_0) &= \Delta T_E \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y)\, \delta(\rho - x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0)\, dx\, dy & (3.2) \\ &= \Delta T_E\, \check{I}(\rho_0, \theta_0), & (3.3) \end{aligned}$$

hvor $\check{I}(\rho_0, \theta_0)$ ses at være den Radon transformerede af den stedlige henfaldsaktivitet langs linien $L(\rho_0, \theta_0)$.

[1]Gennemsnit af uendeligt mange forsøg.

For at kunne rekonstruere det ønskede objekt fuldstændigt skal der ske en samtidig detektion langs alle linier L i intervalet $(\rho, \theta) \in [-\rho_{max}, \rho_{max}] \times [0; \pi[$, hvor ρ_{max} er afstanden fra origo til detektorringen. Ved brug af dette interval er det muligt at rekonstruere strålings intensiteten i hele arealet indenfor detektorringen (se Deans [Dea93]). Et diskret sæt af projektioner vil dog kun muliggøre rekonstruktion af et tilnærmet billede af intensiteten.

Ved medicinsk brug af PET skanning er objekterne patienter eller forsøgspersoner. Med en PET skanning kan det f.eks. undersøges, om patienten har en hjernetumor. Dette sker ved at patienten får injiceret et radioaktivt materiale i blodet. En tumor vil på det rekonstruerede billede fremstå som et område i hjernen, hvor der er ekstra stor eller lille aktivitet på baggrund af den ændrede blodgennemstrømning i tumoren. Da det radioaktive materiale udsender positroner, kaldes en sådan skanning for en *emissions*-skanning. Det observerede emissions-sinogram betegnes $E(\rho, \theta)$. Emisssionsskanningen giver mulighed for at få indblik i sygdomsforløb i organer hvor det ellers ikke er muligt at observere uden at foretage indgreb.

3.3 Korrektion af emissions-sinogrammet

En direkte observation af et radioaktivt objekt vil ikke give et sandt billede af strålingsfordelingen. Dette skyldes, at der sker en dæmpning af fotonerne fra udsendelsespunktet til detektorerne. Det er muligt at foretage korrektioner for denne dæmpning, og i dette afsnit vil metoder til dette blive gennemgået. Som indgangsvinkel er brugt en simpel model for absorption af gammastråling, hvorefter korrektionsmulighederne gennemgås med udgangspunkt i denne.

3.3.1 Dæmpning af gammastråling

Dæmpningen i et objekt kan beskrives ved brug af den lineære absorptionskoefficient der har den velkendte eksponentielle form. I det én-dimensionale tilfælde for et homogent medie, vil dæmpningen have formen

$$I(x_1) = I_0\, e^{-\mu_1 x_1}, \tag{3.4}$$

hvor μ_1 er mediets lineære dæmpningskoefficient og hvor strålerne passerer mediet langs et liniestykke af længden x_1. I_0 er intensiteten ved mediets begyndelse. Hvis mediet består af N homogene områder med forskellige dæmpningskoefficienter fås

$$I\left(\sum_i x_i\right) = I_0\, e^{-\sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i}. \tag{3.5}$$

Ved at gøre de enkelte områder mindre, fås i grænsen hvor mediet antages inhomogent

$$I(x) = I_0\, e^{-\int_x \mu(x)\, dx}, \tag{3.6}$$

når mediet passeres langs et liniestykke med længde x. Den enkelte foton har dermed sandsynligheden P for at passere igennem stoffet med længden L, hvor P er

$$P = \frac{I(L)}{I_0} = e^{-\int_x \mu(x)\, dx}. \tag{3.7}$$

Dæmpningen af strålingen sker primært ved *Compton spredning* eventuelt med efterfølgende absorbsion, da fotonerne har en energi omkring 0.5 MeV, se Lawætz [Law93]. Ved Compton spredning vekselvirker fotonen med en elektron, mister energi og ændrer retning. Resultatet i formel (3.7) vil i det følgende blive brugt til at udlede fotonernes dæmpning under en emissionsskanning.

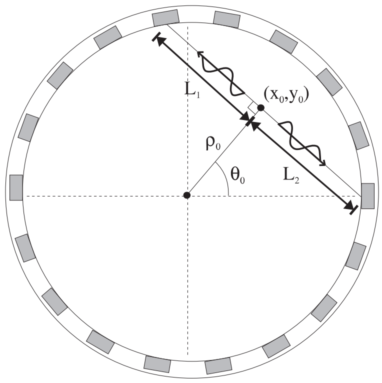
3.3.2 Dæmpning i emissions-skanningen

For at analysere dæmpningseffekten i en emmisions-skanning, betragtes to samtidigt udsendte fotoner fra punktet (x_0, y_0). Efter udsendelse vil fotonerne bevæge sig langs liniestykkerne L_1 og L_2 mod detektorringen som vist på figur 3.3. Sandsynligheden P_1 for at fotonen, der bevæger sig langs liniestykket L_1, vil nå detektorringen kan i følge formel (3.7) tilnærmes som

$$P_1 = e^{-\int_{L_1} \mu_{objekt}(x,y)ds}, \tag{3.8}$$

hvor μ_{objekt} er dæmpningskoefficienten i objektet. Sandsynligheden P_2 for at fotonen, der bevæger sig langs linien L_2, vil nå detektorringen er

$$P_2 = e^{-\int_{L_2} \mu_{objekt}(x,y)ds}. \tag{3.9}$$



Figur 3.3: Korrektion for dæmpning i vævet.

Da fotonerne efter udsendelsen er uafhængige, vil sandsynligheden for at begge fotoner observeres være produktet $P_1\,P_2$ som

$$\begin{aligned} P_{(\rho,\theta)} &= P_1\,P_2 && (3.10)\\ &= e^{-\int_{L_1} \mu_{objekt}(x,y)ds}e^{-\int_{L_2} \mu_{objekt}(x,y)ds} && (3.11)\\ &= e^{-\int_{L(\rho,\theta)} \mu_{objekt}(x,y)ds}, && (3.12) \end{aligned}$$

hvor $L(\rho,\theta)$ er linien der indeholder både L_1 og L_2. $P_{(\rho,\theta)}$ er sandsynligheden for, at en foton kan bevæge sig langs linien $L(\rho,\theta)$, og afhænger kun af parametrene ρ og θ. Den lineære absorptionskoefficient μ_{objekt} indeholder oplysninger om den dæmpning, der er i det aktuelle objekt. Da alle fotoner ikke detekteres med samme sandsynlighed, er det nødvendigt at indføre disse forhold i formel (3.2) som

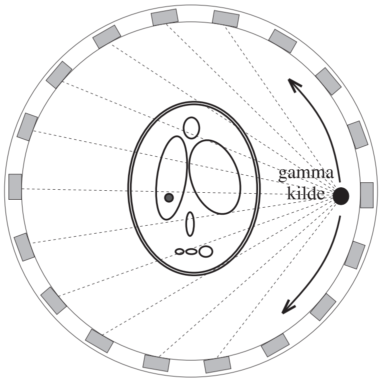
$$\begin{aligned} E(\rho,\theta) &= \Delta T_E \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{(\rho,\theta)}\, I(x,y)\,\delta(\rho - x\cos\theta - y\sin\theta)\,dx\,dy && (3.13)\\ &= \Delta T_E\, P_{(\rho,\theta)}\, \check{I}(\rho,\theta) && (3.14) \end{aligned}$$

hvor $P_{(\rho,\theta)}$ er sandsynligheden for, at fotonerne der udsendes langs linien (ρ,θ) detekteres. Da P vil være konstant under integrationen for et vilkårligt (ρ,θ), kan den flyttes udenfor integrationen. Det antages at dæmpningen er uafhængig af intensiteten $I(x,y)$. Størrelsen $E(\rho,\theta)$ er dermed den målte emission korrigeret for dæmpningen af de udsendte foton-par.

Den lineære absorptionskoefficient er uafhængig af emissions-skanningen og kan derfor estimeres med andre typer af skanninger. I en PET skanner bliver denne dæmpning målt ved hjælp af en ekstern kilde. Denne måling kunne i teorien godt udføres eksternt i en rigtig CT skanner, men denne fremgangsmåde vil give store problemer med placering af patienten og uoverensstemmelse mellem de to skanneres detektorgeometrier. Alle de i dette kapitel omtalte skanninger vil derfor rent praktisk blive foretaget af den samme PET skanner.

3.3.3 Måling af dæmpningen i vævet

Estimationen af dæmpningskoefficienten $P_{(\rho,\theta)}$ sker rent praktisk ved at foretage to ekstra skanninger. Den første skanning skal estimere dæmpningen i objektet ved brug af en ekstern kilde, den næste skanning bruges til kalibrering, hvor den anvendte kildes styrke fastlægges. Ved begge skanninger placeres det radioaktive materiale i en kilde ude ved kanten af detektorringen og føres rundt om objektet der skal skannes. Dette er illustreret på figur 3.4.



Figur 3.4: Placering af gammakilden ved transmission-skanning.

Den radioaktive kilde udsender gammastråler med en energi på ca. 0.5 MeV, hvilket svarer til energien af de ved positron-annihilation udsendte fotoner[2]. Ved en fast stilling af kilden kan dæmpningen langs linierne med udgangspunkt i den aktuelle placering bestemmes. Ved at rotere kilden rundt langs detektorringen og samtidig registrere antallet af ankomne fotoner til detektorerne, vil det være muligt at udspænde hele Radonrummet ved målingen af dæmpningen i objektet.

Ved den første skanning, hvor objektet er placeret i skanneren, vil det observerede sinogram $T(\rho,\theta)$ få følgende form

$$T(\rho,\theta) = \Delta T_T \, I_0 \, e^{-\int_{L(\rho,\theta)} \mu(x,y) ds}, \tag{3.15}$$

hvor I_0 er kildens styrke, der regnes for konstant under hele skanningen. Denne skanning kaldes *transmissions*-skanningen, da strålerne transmitteres gennem objektet. Den lineære dæmpningskoefficient $\mu(x,y)$, der estimeres ved denne skanning indeholder desuden information om dæmpningen af strålingen i skannerens indkapsling, da strålerne også passerer denne før detektion. Da denne dæmpning er uafhængig af objektet, vil der gælde følgende

$$\int_{L(\rho,\theta)} \mu(x,y) = \int_{L(\rho,\theta)} \mu_{objekt}(x,y) + \int_{L(\rho,\theta)} \mu_{skanner}(x,y). \tag{3.16}$$

Til bestemmelse af kildens styrke og dæmpningen af denne i bla. skannerens kabinet, bliver der foretaget en ny skanning. Denne foretages med en tom skanner, og kan derfor foregå

[2]Se afsnit 3.4.2.

over et længere tidsrum end de andre skanninger. Denne skanning kaldes *blank*-skanningen. Sinogrammet for denne skanning $B(\rho,\theta)$ vil blive

$$B(\rho,\theta) = \Delta T_B \, I_0 \, e^{-\int_{L(\rho,\theta)} \mu_{skanner}(x,y)ds}. \tag{3.17}$$

Ved indsættelse af formel (3.17) og formel (3.15) i formel (3.12) kan $P_{(\rho,\theta)}$ estimeres til

$$\begin{aligned} P_{(\rho,\theta)} &= e^{-\int_{L(\rho,\theta)} \mu_{objekt}(x,y)\, ds} && (3.18)\\ &= e^{-\int_{L(\rho,\theta)} \mu(x,y)\, ds} e^{\int_{L(\rho,\theta)} \mu_{skanner}(x,y)\, ds} && (3.19)\\ &= \frac{T(\rho,\theta)}{I_0 \Delta T_T} \frac{I_0 \Delta T_B}{B(\rho,\theta)} && (3.20)\\ &= \frac{T(\rho,\theta)\, \Delta T_B}{B(\rho,\theta)\, \Delta T_T}. && (3.21) \end{aligned}$$

Med formel (3.13) ved indsættelse af formel (3.21), kan et korrigeret sinogram af den ønskede intensitet bestemmes som

$$\check{I}(\rho,\theta) = \frac{E(\rho,\theta)B(\rho,\theta)}{T(\rho,\theta)} \frac{\Delta T_T}{\Delta T_E \Delta T_B}. \tag{3.22}$$

Hvor der for at bestemme den spatiale intensitets fordeling $I(x,y)$ skal foretages en invers Radon transformation af det korrigerede sinogram $\check{I}(\rho,\theta)$.

3.3.4 Fejlkilder ved skanning

Det er dog ikke helt problemfrit at benytte de beskrevne transmissions- og blank-skanninger. Især transmissions-skanningen kan være dårligt bestemt. Dette skyldes, at den anvendte kilde er nødt til at være relativt svag for at undgå at patienterne udsættes for en for høj strålingsdosis. Da signal/støj forholdet i transmissions-skanningen dermed bliver meget dårligt, er det muligt, at der i nogle punkter vil blive målt meget få værdier i sinogrammet $T(\rho,\theta)$, hvilket fejlagtigt vil afspejle en meget stor dæmpning igennem objektet. Dette betyder, at det korrigerede sinogram udregnet efter formel (3.22) i dette punkt vil vise en meget høj (falsk) emission. Dette kan føre til artifakter i den efterfølgende rekonstruktion. For en mere grundig gennemgang af dette problem, henvises til Chan [Cha86].

Da transmissions-skanningen er relativt dårligt bestemt, bruges denne korrektion ikke ved helkrops undersøgelser af patienter på Rigshospitalet. Brug af denne korrektionen har ved eksperimenter vist kun at gøre det rekonstruerede billede dårligere.

3.4 Stråle-fysiske usikkerheder

Selv når sinogrammet er korrigeret ved brug af transmissions- og blank-skanningerne, vil den opnåelige opløsning være begrænset. Dette skyldes stråle-fysiske forhold under udsendelsen af fotonerne.

Fotonerne er dannet ved positron-elektron annihilation. Efter udsendelse af positronen er der usikkerhed om, hvor positronen bevæger sig hen før sammensmeltningen med en elektron. Det vil her blive belyst, hvorfor det kan antages, at emissions-sinogrammet er dannet med en Poisson-proces for de enkelte målinger.

3.4.1 Dannelse af positroner

I forbindelse med PET skanning dannes positronerne ved radioaktivt henfald af et materiale der er injiceret i det objekt, der skal måles på. Et ofte benyttet materiale er ilt-isotopen O–15, bundet i radioaktivt vand. Der benyttes også andre isotoper, men O–15 vil i dette afsnit blive brugt som eksempel.

Isotopen O–15 omdannes til N–15 med en halveringstid på 124 sekunder. Der frigøres samtidig en kinetisk energi på 2,71 MeV, der fordeles mellem positronen og den samtidig udsendte anti-neutrino. Den største del af energien tilfalder anti-neutrinoen og kun i sjældne tilfælde tilfalder hele energien positronen. Positroner dannet på denne måde vil i gennemsnit have en kinetisk energi på omkring 1 MeV.

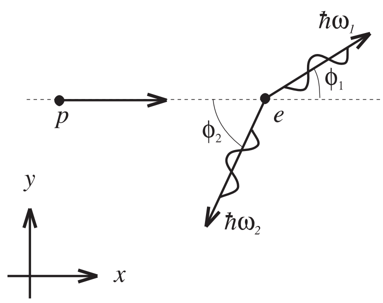
Efter at positronen er dannet, vil den tabe energi før den annihilerer med en elektron. Da egenskaberne for en elektron og en positron næsten er identiske, antages det, at de kendte ioniserings fænomener mv. gælder. Dvs. at en 1 MeV positron taber sin energi på ca. 4 mm i vand iflg. Lawætz [Law93] og på 2-4 mm i hjernen. Dette har den effekt, at selv om det kun var en enkelt punktkilde der udsendte positroner, ville positronerne nå at udbrede sig i rummet inden annihilation, og dermed skabe et diffust indtryk af kilden, svarende til en rumlig punkt-spredning. Denne spredning sætter en praktisk begrænsning for den opnåelige opløsning med en PET skanner.

3.4.2 Positron annihilation

Ved positron-elektron annihilationen sker der også en degenerering af signalet. Når positronen og elektronen smelter sammen, dannes to fotoner der approksimativt hver vil have energien 511 keV. Disse udsendes langs diametralt modsatte retninger i rummet.

Hvis det antages at positronen bevæger sig langs x aksen med impulsen p_p hvorpå den støder sammen med en elektron der er i hvile, vil de to dannede fotoner vil forlade sammensmeltningspunktet med vinklerne ϕ_1 og ϕ_2 (se figur 3.5), og vil have energierne $\hbar\omega_1$ og $\hbar\omega_2$. Positronen og elektronen vil før sammensmeltningen have følgende relativistiske energier

$$E_p = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}, \tag{3.23}$$
$$E_e = m_e c^2. \tag{3.24}$$



Figur 3.5: Positron-annihilation.

Ved sammensmeltningen skal der være energi-og impulsbevarelse hvilket betyder at

$$E_p + E_e = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2\,, \tag{3.25}$$
$$p_p = \frac{\hbar\omega_1}{c}\cos(\phi_1) - \frac{\hbar\omega_2}{c}\cos(\phi_2)\,, \tag{3.26}$$

$$0 = \frac{\hbar\omega_1}{c}\sin(\phi_1) - \frac{\hbar\omega_2}{c}\sin(\phi_2)\,. \quad (3.27)$$

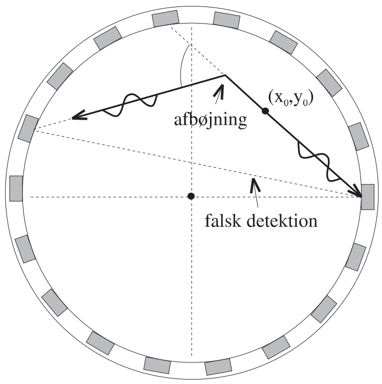
Hvis det antages at positronen er i hvile ved sammensmeltningen således at $p_p = 0$, ses det af formel (3.26) og formel (3.27) at $\omega_1 = \omega_2$ og dermed $\phi_1 = \phi_2$. Dermed ses at

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 = m_e c^2 = 511\text{keV}, \quad (3.28)$$

og at fotonerne må bevæge sig i diametralt modsatte retninger. Hvis positronen har en kinetisk energi, og dermed en impuls $p_p > 0$ ved sammenstødet, vil der være en lille afvigelse fra de 180° mellem de to fotoner (se Herman [Her80]). Der vil i denne rapport ikke blive taget hensyn til denne afvigelse.

3.5 Detektionsforhold

Compton spredningen af fotonerne vil også give andre effekter end blot dæmpning af den modtagne stråling. Hvis en fotons bane ændres ved Compton spredning, således at den rammer en anden detektor, end den der lå på dens oprindelige bane, vil der blive optaget et falsk henfald tilhørende en forkert henfaldslinie. Dette er illusterert på figur 3.6. Disse falske detektioner kaldes *scatter*, og vil være medvirkende til et dårligere signal/støj forhold i det målte sinogram. Fotoner spredt med Compton spredning kan også detekteres, selvom de ved afbøjningen har mistet energi. Dette skyldes at detektorerne er i stand til at detektere fotoner med energiniveauer mellem ca. 350 keV og 570 keV, ifølge Freifelder [Fre94] og Brooks [Bro81].



Figur 3.6: Fejldetektering grundet Compton spredning.

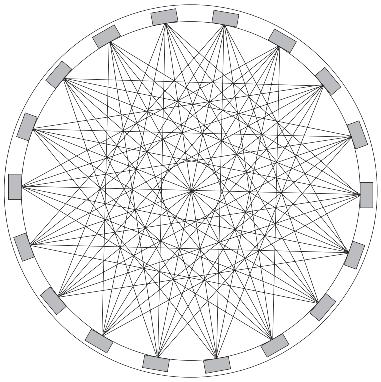
De udsendte fotoner vil fra udsendelsespunktet have forskellige afstande til detektorringen, hvilket giver en lille forskel i ankomsttiderne til de to detektorer. En afstands forskel på 30 cm vil give en tidsforskel i ankomsttiden for de to fotoner på ca. 1 ns. For at kunne udnytte denne tidsforskel til at lave bedre rekonstruktioner med, er der udviklet en type skannere baseret på måling af denne tidsforskel, *time of flight* (TOF-PET) skannere. Disse kan bestemme henfaldspunktet for en positron med ned til ca. 4,5 cm's nøjagtighed (se Mallon [Mal92]). Hvis denne information udnyttes i rekonstruktionen, bør der kunne dannes bedre billeder.

Forskellen i ankomsttiderne mellem fotonerne er lille sammenlignet med *dødtiden* for en detektor. Dødtiden er perioden fra en detektor har detekteret en foton, til den samme detektor er klar til at registrere en ny foton, og vil for moderne detektorer gerne være på ca. 2,5 μs (se Freifelder [Fre94]). På grund af den svage dosis der benyttes til patient skanningerne, vil denne dødtid ikke få væsentlig betydning.

Henfald med udsendelse af positroner er indbyrdes uafhængige, og en måling med halv måletid vil medføre den halve middelværdi i gennemsnit. Dermed følger aktiviteten en Poisson-proces (se bla. Kaufmann [Kau93]). Den efterfølgende spredning er kaotisk, hvilket imidlertid ikke påvirker fordelingen. Positron-annihilationen og den efterfølgende dæmpning er hver især også uafhængig af de tidligere trin i processen, hvilket antyder at den endelige fordeling af sinogrammet stadig vil følge en Poisson fordeling.

3.6 Praktiske forhold

I en PET skanner er der et begrænset endeligt antal detektorer, hvilket betyder at det målte Radon rum er diskretiseret. Foton-par der bevæger sig på linier med små forskelle i ρ og θ vil registreres af samme detektorpar. Således vil det målte sinogram være en lavpas filtreret udgave af det søgte. At der er et begrænset antal detektorer betyder at den spatiale opløsning for skanneren vil variere med afstanden fra origo (se Budinger [Bud79]). For en skanner med detektorerne monteret i et cirkulært array er dette indikeret på figur 3.7.



Figur 3.7: Mulige sammenfalds linier for en skanner med 18 detektorer.

Den samlede opløsning af en PET skanner er dermed begrænset, dels på grund af strålefysiske fejlkilder, dels på grund af det begrænsede antal detektorer. Dette betyder, at zoom under inverteringen ikke vil kunne betale sig, hvis det forsøges at rekonstruere med en opløsning, der er bedre end de ovennævnte forhold begrænser præcisionen til.

3.7 Resumé

I dette kapitel er forskellige praktiske forhold vedrørende selve data-opsamlingen med en PET skanner blevet gennemgået. Der er blevet illustreret forskellige faktorer der gør at den nøjagtighed hvormed en estimering af emissions distributionen kan foretages, er begrænset. En korrektion for nogle af disse faktorer vil gerne blive foretaget af selve PET skanneren, men der bør være kendskab til disse fysiske problemer i forbindelse med udviklingen af billedrekonstruktions algoritmer.

Kapitel 4

Rekonstruktion

I dette kapitel, vil der kort blive gennemgået fordele og ulemper ved de mest anvendte to-dimensionale direkte rekonstruktions algoritmer idag. En opdeling af algoritmerne i forskellige klasser vil blive foretaget. Motivationen for udvælgelsen af de algoritmer der vil blive undersøgt, vil blive givet. Der vil blive givet en kort diskussion af problemerne ved implementering af Radon rekonstruktions algoritmer baseret på direkte metoder.

4.1 Rekonstruktions metoder

Hvis der skal gives en gennemgang af de rekonstruktions metoder, der igennem tiden har vundet indpas, vil denne aldrig blive helt komplet, grundet den store udvikling der stadigvæk er inden for dette område. En grov opdeling af de dominerende klasser af metoder der eksisterer, kan se ud som:

- Filtrerede tilbageprojektions metoder,
- Direkte Fourier metoder,
- Iterative metoder,
- Hybride metoder.

De filtrerede tilbageprojektions metoder og Fourier metoderne betegnes begge *transformations-* eller *direkte* metoder. De iterative metoder dækker over flere forskellige typer af metoder, disse inkluderer *algebraiske* metoder og *statistiske* metoder, der begge tager udgangspunkt i et lineært ligningssystem, men løser problemet fra forskellige udgangspunkter. De hybride metoder er en blanding af forskellige fremgangsmåder. Herefter følger en kort gennemgang af de forskellige metoder, og en beskrivelse af deres karakteristika.

4.1.1 Filtrerede tilbageprojektions metoder

De almindelige tilbageprojektions metoder, er direkte implementeringer af en mindre omformulering af Radons inversionsformel, baseret på en filtrerings- og en tilbage projektionsdel. De to algoritmer der er tale om er:

- Filtered Backprojection,
- Filtering after Backprojection.

Forskellen mellem de to algoritmer er rækkefølgen hvormed filtreringen hhv. tilbageprojektionen bliver foretaget. I kommercielt udstyr til computer tomografi, er Filtered Backprojection metoden den fremherskende, grundet en meget simpel opbygning, og numerisk stabil opførsel, dog er denne algoritme relativt beregningskrævende. For at kompensere for dette, bliver der ved praktisk implementering af en Filtered Backprojection algoritme ofte brugt dedikeret hardware og udnyttelse af massiv parallel processering. Filtering after Backprojection bliver i litteraturen ofte referet som *Convolution Backprojection*. Begge de to ovenstående algoritmer er blevet implementeret, og vil blive gennemgået i kapitel 7.

4.1.2 Fourier metoder

I computer baseret tomografi er Filtered Backprojection metoden som ovenfor beskrevet den fremherskende. Dette på trods af dens relativt store beregningskompleksitet. De stadig stigende krav til beregningshastighed i tre-dimensionale skannere og ved dynamiske studier (f.eks. hjerte studier) gør, at opmærksomheden også er blevet vendt mod hurtigere algoritmer som de direkte Fourier metoder, der lover en langt hurtigere rekonstruktions tid, på bekostning af en væsentlig mere kompliceret implementering.

Fourier metoderne er baseret på den én- og to-dimensionale Fourier transformation, og en koordinat transformation fra polære til rektangulære koordinater. Denne transformation viser sig at være helt central for rekonstruktionens kvalitet, og har derfor tiltrukket sig en del opmærksomhed. Koordinat transformationen er stort set baseret på to-dimensional interpolation, og det viser sig at en Fourier metodes rekonstruktions kvalitet er meget afhængig af den anvendte interpolations metode i koordinat transformationen. Der er konstrueret specielle Fourier metoder, der benytter helt andre algoritmer for at mindske kravene til interpolationen f.eks. *Linogram* metoden (se bla. Edholm [Edh87]), men disse er ikke grundlæggende forskellige fra de almindelige Fourier metoder. Blandt de mest brugte interpolations teknikker, er:

- Nærmeste nabo,
- Bilineær,
- Kvadratisk ,
- Spline,
- Sinc,
- Chirp-z.

Der er blevet implementeret rutiner med nærmeste nabo, bilineær og chirp-z interpolation, Nærmeste nabo antages at være den dårligste måde at foretage interpolation på, og chirp-z interpolation en af de bedre. Fourier metoder bliver i litteraturen også benævnt *Fourier Slice*, *Central Slice* eller *Projection Slice* metoder.

4.1.3 Iterative metoder

De iterative metoder er grundlæggende forskellige fra transformations metoderne, der finder en analytisk løsning, diskretiserer og tilpasser denne til den aktuelle applikation. Der er ingen umiddelbar forbindelse til de iterative metoder.

De iterative metoder tager som udgangspunkt et endeligt antal værdier repræsenterende de målte positronhenfald. Disse relaterer med et endeligt antal ukendte værdier repræsenterende den søgte distribution. Forholdet mellem disse kan opstilles som et diskret lineært ligningssystem, der kan løses numerisk. Ligningssystemet bliver dog upraktisk stort, gerne med over 10^4 ligninger der skal løses for lige så mange ukendte. Kompleksiteten af ligningssystemet gør det upraktisk at løse problemet på én gang med de gængse metoder til løsning af ligningssystemer.

Selvom de iterative metoders fremgangsmåde er lettere at forstå, er de enormt beregnings- og ressourcekrævende, hvilket indtil videre sætter en naturlig begrænsning for deres praktiske anvendelighed, indtil den nødvendige computerkraft er til rådighed.

Der eksisterer to store klasser af iterative metoder, de *algebraiske* metoder, og de *statistiske* metoder. Begge metoder løser det opstillede ligningssystem. Hvor de algebraiske metoder baserer sig på 'klassisk' algebra, bruger de statistiske metoder bla. Maximum Likelihood metoder og entropi betragtninger for at approksimere en løsning. Af de algebraiske metoder kan nævnes

- ART (Algebraic Reconstruction Techniques),
- MART (Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique),
- CG-LS (Conjugate Gradient Least Squares).

hvor der forekommer adskillige varianter af hver af metoderne. Af de statistiske metoder er de mest anvendte

- ML-EM (Maximum Likelihood - Expectation Maximization),
- MAP-EM (Maximum A Posteriori),
- LS-EM (Least Squares).

Der henvises til del II af rapporten, for en gennemgang af iterative rekonstruktionsmetoder.

4.1.4 Hybride og specielle metoder

I forsøg på at kombinere forskellige gode egenskaber fra forskellige algoritmer, er der igennem tidens løb blevet udviklet adskillige *hybride* metoder. Disse har demonstreret bedre rekonstruktionskvalitet end standard metoderne ved specifikke opgaver. Dog som regel på bekostning af en væsentlig mere kompliceret implementering. Et lille udvalg af hybride metoder:

- Kombination af Filtered Backprojection og ML-EM, Herbert [Her93a]
- Iterativ Filtered Backprojection, Xu [Xu,93]
- Transformations metoder som startgæt til en iterativ metode, Herman [Her80].

Ydermere eksisterer der en mængde rekonstruktions algoritmer, specielt lavet til anderledes skanner geometrier (eksisterende og foreslåede), der rekonstruerer bedre eller hurtigere end de generelle algoritmer. Sådanne algoritmer har naturligvis begrænset generel brugbarhed.

4.2 Implementerede rekonstruktions algoritmer

De metoder der er blevet implementeret og testet i denne rapport, er alle transformations metoder, repræsenterende de filtrerede tilbageprojektions metoder og de direkte Fourier metoder. Begge typer metoder baserer sig på almindelig digital signalbehandling og billedanalyse, og vil derfor kunne implementeres på grundlag af de funktions biblioteker, der er blevet udviklet under dette projekt. De iterative metoder derimod er baseret på matrix og vektor udregninger, og vil kræve opbygningen af helt nye funktions biblioteker for at kunne implementere og teste disse. Der henvises til rapportens del II, for en gennemgang af brugen af iterative metoder til rekonstruktion af PET billeder.

Denne rapport er derfor centreret om at vurdere de traditionelle transformations metoder i forhold til hinanden. Der er blevet implementeret og testet rutiner, der rekonstruerer ved hjælp af følgende metoder:

- Filtered Backprojection
- Filtering after Backprojection
- Central Slice med
  - Nærmeste nabo interpolation
  - Bilineær interpolation
- Speciel version af Central Slice med ulineær re-sampling af Radon domænet, og chirp-z interpolation i koordinat transformationen

Hermed opnås der mulighed for at sammenligne den almindelige Filtered Backprojection algoritme med Central Slice algoritmen med brug af forskellig grad af interpolation. De tre implementerede Central Slice rutiner, gør det muligt at vurdere interpolationens betydning for rekonstruktionens kvalitet, da der er valgt metoder repræsenterende både gode og dårlige interpolations metoder.

I det følgende afsnit vil blive givet en kort diskussion omkring implementeringen af direkte rekonstruktionsmetoder som de ovennævnte.

4.3 Rekonstruktion med direkte metoder

Problemet med at rekonstruere en to-dimensional funktion fra projektioner, kan formuleres som følgende: *givet* $\check{f}(\rho,\theta)$*, find* $f(x,y)$. De opsamlede data $\check{f}$ er afhængige af den søgte distribution f. Denne afhængighed kan beskrives med integral transformationen i formel (2.6). At finde f, indebærer af der skal findes en invers løsning til denne integral transformation. En sådan løsning blev allerede publiceret af Radon i 1917 [Rad17], med en inversionsformel, der udtrykte f ved hjælp af $\check{f}$. Af Deans [Dea93] bliver Radons originale inversionsformel præsenteret som

$$f(x,y) = \mathcal{R}^{-1}[\check{f}(\rho,\theta)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\partial\check{f}(\rho,\theta)}{\partial\rho}}{\rho - x\cos\theta - y\sin\theta}\,d\rho\,d\theta. \tag{4.1}$$

Invertering af integral transformationen består i at rekonstruere en funktion $f(x,y)$ fra værdier af dens linie integraler. Dette matematiske problem repræsenterer en idealiseret abstraktion af det problem, der findes i praktiske applikationer. Dette kan formuleres som: *givet* projektions data i form af estimater for $\check{f}$ for et endeligt antal af projektioner, *find* det estimat for det rekonstruerede to-dimensionale billede, der repræsenterer den søgte distribution.

I Deans [Dea93] er refereret et af de vigtigste teoremer om rekonstruktion fra projektioner: "A function f of compact support in $\mathbf{R}^2$ is uniquely determined by any infinite set, but by no finite set, of its projections". Dette teorem siger, at det er umuligt at rekonstruere et objekt *fuldstændigt* fra et endeligt diskret sæt af dets projektioner. Det vil dog være muligt at komme vilkårligt tæt på løsningen med et endeligt sæt projektioner, afhængigt af antallet af disse.

Udover den diskrete natur af de opsamlede data vil der optræde en række fysiske problemer, stammende fra at de målte date ikke præcist repræsenterer det komplette sæt linieintegraler. Dette fører til fejl og unøjagtigheder i de resulterende rekonstruktioner. De fysiske målinger kan være utilstrækkelige på en række områder, disse inkluderer ulineariteter, støj og utilstrækkelige data.

Der kan skelnes mellem flere former for rekonstruktions algoritmer. Den klasse af metoder der baserer sig på analytisk invertering af Radons originale transformationsformel, vil fremover blive betegnet *transformations-* eller *direkte* metoder. Der er efterhånden mange andre klasser af metoder der ikke kan betegnes som transformations metoder. Her tænkes bla. på algebrariske og statistiske metoder. De metoder der vil blive præsenteret i denne del af rapporten, er alle transformations metoder.

At implementere en transformations algoritme, indebærer følgende skridt:

1) Formuler en matematisk model af problemet.

2) Løs for den ukendte størrelse ved hjælp af en inversions formel.

3) Tilpas inversion formlen til diskrete data med støj.

Hvis denne model bruges, findes i 2), at der eksisterer forskellige formler der teoretisk er ækvivalente løsninger til det i 1) opstillede problem. Når hver af disse formler er diskretiseret i 3), vil det vise sig, at algoritmerne ikke opfører sig ens på rigtige data, da forskellige antagelser er blevet introduceret under diskretiseringen.

4.4 Resumé

I dette kapitel er de mest anvendte rekonstruktions metoder til PET rekonstruktion blevet præsenteret. De i dette projekt implementerede direkte rekonstruktionsmetoder er blevet valgt, og problemer i forbindelse med implementering af direkte rekonstruktions metoder er blevet diskuteret. I to følgende kapitler vil der blive givet en gennemgang af de direkte Fourier metoder hhv. de filtrerede tilbageprojektions metoder, og hvorledes disse er blevet implementeret.

Kapitel 5

Program til direkte rekonstruktion

Da mange af de rutiner der er implementeret i denne del af projektet er baseret på de samme digitale signalbehandlings metoder, er det blevet valgt at opbygge dem omkring fællels billedbehandlings hhv. digital signalbehandlings biblioteker. De udviklede funktions biblioteker, samt hovedprogrammet `iradon` vil blive beskrevet i dette kapitel.

5.1 Billedbehandlings bibliotek

I dette bibliotek er placeret rutiner til på forskellig vis at manipulere to-dimensionale billeder. Der er defineret et billedformat `Image`, baseret på en reel eller kompleks flydende tals repræsentation af billedværdierne. Billedbiblioteket indeholder blandt andet:

- Definition af `Image` billedformatet.
- Rutiner til at allokere og frigøre hukommelse til billeder.
- Rutine til at hente billeder i General Electric PET skanner format, `Analyze` formatet, med individuel udvælgelse og konvertering af enkelte billeder i de gemte sekvenser.
- Rutiner til at hente og gemme billeder i følgende formater:
  - Eget `.FIF` format, enkelt præcisions flydende tal med header.
  - Matlab `.MAT` matrix format, med enkelt- eller dobbelt præcisions tal.
  - Compuserve `.GIF` format, 256 diskrete niveauer.
  - Gammelt `.DAT` format, enkelt præcisions flydende tal uden header.
- Rutine til at kopiere billeder.
- Rutine til at normere billeder.
- Rutiner til at konvertere mellem komplekse og reelle billeder.
- Rutiner til at ændre størrelsen på billeder, ved at fjerne værdier, eller addere nuller i én eller flere retninger.

Alle rutiner til ind- og udlæsning af billeder er i stand til at automatisk at konvertere filer skrevet på PC hhv. HP-9000 maskiner korrekt.

5.2 Signalbehandlings bibliotek

I biblioteket `calc` er placeret alle rutiner der har at gøre med selve den digitale signalbehandling. Disse rutiner inkluderer ud over selve rekonstruktions algoritmerne:

- Fast Fourier transformations rutiner der kan udføre:
  - En-dimensional FFT af komplekse signaler.
  - Hurtigere en-dimensional FFT af reelle signaler.
  - Hurtigere en-dimensional FFT af komplekse billeder.
  - To-dimensional FFT af komplekse billeder.
- Billedbehandling i forbindelse med Fourier transformation, FFT-skift, spejlning ol.
- Udregning af chirp-z transformationen for komplekse signaler.
- Filtrering af tids- og frekvens signaler med forskellige filtre.
- To-dimensional median- og middelværdi filtrering af billeder.

5.3 Evaluerings bibliotek

I biblioteket `eval` er placeret rutiner til udregning af forskellig information om billeder. Der er inkluderet rutiner til at:

- Bestemme min/max billed værdier.
- Udregne middelværdi og spredning for billeder.
- Finde differens mellem billeder.
- Udregne L_1- og L_2-mål for rekonstruktioners godhed.

5.4 Diverse rutiner

Rutiner der ikke kan inkluderes i ovennævnte biblioteker, er blevet placeret i `misc` biblioteket. Disse inkluderer:

- Styring af skærm output.
- Administration af en log-fil.
- Fejl behandlings rutiner.
- Indlæsning og fortolkning af initialisering fil (`.ini`-fil).

5.5 'iradon' programmet

Hovedprogrammet `iradon`, samler alle de udviklede rekonstruktions rutiner under et fælles interface. Alle rekonstruktions algoritmerne er implementeret således at de bruger samme parametre til at bestemme interesseområdet i outputbilledet med, og kan derfor nemt sammenlignes på fælles grundlag.

Der henvises til appendix C for en beskrivelse af brugen af `iradon` programmet, appendix E for en LaTeX-formatteret udskrift af funktions hovederne for filer tilhørende `iradon` programmet, og appendix D for en udskrift af alle de til `iradon` hørende program filer. I appendix F er en oversigt og beskrivelse af de øvrige programmer der er udviklet til denne del af projektet, som ikke direkte er forbundet til `iradon` programmet.

5.6 Resumé

I dette kapitel, er det implementerede program `iradon` til direkte rekonstruktion fra projektioner blevet beskrevet. De funktions biblioteker der er udviklet til denne del af projektet er blevet beskrevet i store træk. Selve de rekonstruktions algoritmer der er blevet implementeret i `iradon` programmet, vil blive beskrevet i de næste to kapitler.

Kapitel 6

Direkte Fourier metoder

I dette kapitel, vil to direkte Fourier metoder blive gennemgået, en 'almindelig' version der bygger på den hurtige Fourier transformation med to-dimensional interpolation, samt en speciel version baseret på ulineær sampling af Radon rummet og interpolation med chirp-z transformationen. Denne version er beslægtet med *Linogram* metoden. To forskellige metoder til at invers Fourier transformere det to-dimensionale spektrum med vil blive vist. Desuden vil den numeriske implementering af rutinerne blive gennemgået.

6.1 Fourier Slice teoremet

De direkte Fourier metoder er baseret på den nære kobling mellem Radon- og Fourier transformationen. Hvis $w(\rho)$ er en vilkårlig funktion, for hvilken det følgende integrale eksisterer, så vil der for alle vinkler θ gælde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\rho,\theta)\, w(\rho)\, d\rho = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, w(x\cos\theta + y\sin\theta)\, dx\, dy. \tag{6.1}$$

Dette resultat fås ved at substituere $\check{f}(\rho,\theta)$ med højresiden fra formel (2.5), og ændre integrations variablene fra polære (ρ, s) til rektangulære koordinater (x, y). Formel (6.1) er central for de direkte Fourier metoder, da den viser at en specifik operation på en projektion med vinkel θ, er ækvivalent med en operation på det originale objekt f. Hvis denne operationen er invertibel, som Fourier transformationen er, kan denne metode bruges til at invertere Radon transformationen med.

Ved at anvende Fourier transformationen, kan formel (6.1), ved at substituere $w(\rho)$ med $\exp(-j2\pi\nu\rho)$, skrives som

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\rho,\theta)\, e^{-j2\pi\nu\rho}\, d\rho = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-j2\pi\nu(x\cos\theta+y\sin\theta)}\, dx\, dy, \tag{6.2}$$

hvilket kan skrives som

$$\tilde{f}(\nu,\theta) = F(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta), \tag{6.3}$$

hvor $\tilde{f}$ er den én-dimensionalt Fourier transformerede af $\check{f}$ i ρ-retningen, og $F(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)$ er den to-dimensionalt Fourier transformerede af $f(x, y)$. Dette resultat er i litteraturen også benævnt *Fourier Slice*, *Projection Slice* eller *Central Slice* teoremet, grundet dets fysiske fortolkning: Hvis θ holdes konstant, så siger teoremet at for alle ν, vil en værdi af $\tilde{f}(\nu,\theta)$ være det samme som værdien af F ved radius ν og vinkel θ i Fourier rummet. Hvis frekvensparametrene for F skrives på rektangulær form som

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

kan en almindelig rekonstruktions algoritme baseret på Fourier transformationen skrives som

$$F(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\rho,\theta)\, e^{-j2\pi\nu\rho}\, d\rho \tag{6.5}$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma,\gamma)\, e^{j2\pi(\sigma x+\gamma y)}\, d\sigma\, d\gamma, \tag{6.6}$$

hvor der fra første til anden linie foretages en koordinat transformation fra polære koordinater til almindelige rektangulære koordinater.

En Fourier baseret rekonstruktions algoritme består således af tre trin:

1) En-dimensional Fourier transformation af projektionerne for hver θ,

2) Koordinat transformation fra polære til rektangulære koordinater i Fourier domænet,

3) To-dimensional invers Fourier transformation for at få det rekonstruerede billede.

Hver af disse trin i rekonstruktionen har sine egne potentielle fejlmuligheder ved en tilsvarende diskret implementering, og det samlede resultat ved implementering, kan blive en ret dårlig approksimation til inversions formlen, hvis disse fejlkilder ikke identificeres. Fejlkilderne vil inkludere:

- Undersamplede projektioner,
- Fejl grundet trunkering af Fourier domænet,
- Interpolations fejl i Fourier domænet,
- Undersampling af Fourier domænet.

Ved en diskret, praktisk implementering, eksisterer der kun et endelig antal af de samplede projektioner $\check{f}(\rho,\theta)$, der skal behandles af den diskrete rutine. En diskret implementering af formel (6.5), hvor Fourier transformationen erstattes af den diskrete Fourier transformation, vil give det to-dimensionale spektrum F på et polært raster grid. Da der ikke umiddelbart eksisterer en hurtig måde at Fourier transformere et sådant spektrum på et polært raster grid, skal dette interpoleres til et almindeligt rektangulært raster grid, der kan invers Fourier transformeres med en almindelig to-dimensional IFFT rutine. Der er i litteraturen bred enighed om, at det er denne koordinat transformation, der er central for rekonstruktions kvaliteten af en direkte Fourier metode (se bla. O'Sullivan [O'S85] og Lewitt [Lew83]). Den mest brugte transformations metode, er simpel to-dimensional interpolation mellem de to koordinat systemer, hvor flere forskellige interpolations teknikker kan anvendes. En anden og mere avanceret metode er, at bruge ulineær sampling af det objekt der skal rekonstrueres (se bla. Mersereau [Mer73], Moraski [Mor91] og Magnusson [Mag89]). Dette udføres i praksis som en re-sampling af sinogrammet, også kaldet *rebinning*[1], da opsamlings geometrien for skanneren ikke lige lader sig ændre. Denne ulineære sampling vil betyde, at der kan bruges mindre kritisk én-dimensional interpolation i spektret.

[1] De diskrete sinogrammer svarende til $\check{f}(\rho,\theta)$ kaldes for *bins*.

6.1.1 Diskretisering

Fourier transformationen af $\check{f}$ i ρ-retningen som i formel (6.6), kan i det diskrete tilfælde approksimeres med en sum, som

$$F(\nu_k \cos\theta_t, \nu_k \sin\theta_t) = \Delta\rho \sum_{r=0}^{R-1} \check{f}(\rho_r, \theta_t)\, e^{-j2\pi rk/R}, \qquad t = 0, 1, \ldots T-1, \tag{6.7}$$

hvor de diskrete parametre er samplet som

$$\begin{aligned} \rho_r &= \rho_{min} + r\Delta\rho, & r &= 0, 1, \ldots, R-1, \\ \theta_t &= \theta_{min} + t\Delta\theta, & t &= 0, 1, \ldots, T-1, \\ \nu_k &= \nu_{min} + k\Delta\nu, & k &= 0, 1, \ldots, K-1. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Ved at vælge $\Delta\nu = 1/(R\Delta\rho)$ og $K = R$, kan en FFT rutine bruges til at udregne summen med. Ligeledes kan formel (6.6) tilnærmes med følgende sum

$$f(x_m, y_n) = \frac{1}{\Delta x \Delta y PQ} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} F(\sigma_p, \gamma_q)\, e^{j2\pi(pm/P + qn/Q)}\,. \tag{6.9}$$

Hvis samplings parametrene for F er

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sigma_{min} + p\Delta\sigma, & p &= 0, 1, \ldots, P-1, \\ \gamma_q &= \gamma_{min} + q\Delta\gamma, & q &= 0, 1, \ldots, Q-1, \end{aligned} \tag{6.10}$$

og f er diskretiseret som

$$\begin{aligned} x_m &= x_{min} + m\Delta x, & m &= 0, 1, \ldots, M-1, \\ y_n &= y_{min} + n\Delta y, & n &= 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{6.11}$$

vil der ved brug af FFT rutiner, gælde at $\Delta x = 1/(P\Delta\sigma)$ og $\Delta y = 1/(Q\Delta\gamma)$, samt at $M = P$ og $N = Q$.

6.2 Numerisk implementering

I de følgende afsnit, vil den numeriske implementering af de ovennævnte rutiner blive præsenteret, med hovedvægten lagt på koordinat transformationen, og zoom i forbindelse med den inverse frekvens transformation.

Der vil for det komplekse spektrum gælde at $F(\sigma, \gamma) = F^*(-\sigma, -\gamma)$. Dette ses ud fra simple symmetri betragtninger, da både projektionerne $\check{f}(\rho, \theta)$, og billedet $f(x, y)$ er reelle størrelser. Derfor vil de følgende diskussioner om koordinat transformation kun dreje sig om at rekonstruere den halvdel af spektret, hvor $\gamma \geq 0$. Den anden halvdel er blot en kompleks konjugeret, spejlet kopi af denne. Ydermere vil der i praksis, for at lette konstruktionen af koordinat transformations rutinerne, blive udført en udvidelse af sinogrammet $\check{f}(\rho_r, \theta_t)$ med en projektion for $t = T$. Denne vil blot være en kompleks konjugeret kopi af projektionen for $t = 0$, men vil lette interpolationen.

6.3 Koordinat transformation

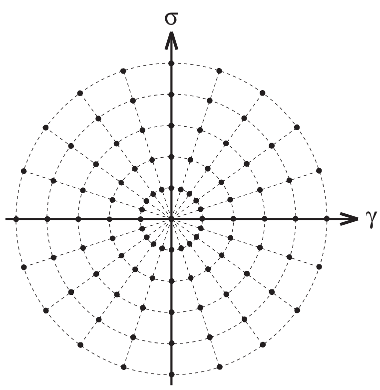
De implementerede Fourier metoder, har mulighed for at foretage den omtalte interpolation i spektret på tre forskellige måder, med *nærmeste nabo* eller *bi-lineær* interpolation, samt *chirp-z* interpolation med ulineær re-sampling af sinogrammet.

Interpolation med nærmeste nabo og bi-lineær interpolation, baserer sig begge på almindelig lineær sampling af Radon rummet, og en repræsentation af de diskrete frekvens punkter på *koncentriske cirkler*, der skal interpoleres i to dimensioner, for at få det resulterende rektangulære grid.

Ved at sample Radon rummet ulineært, kan fås et antal diskrete frekvenspunkter placeret på *koncentriske kvadrater*, der kan transformeres til rektangulære koordinater ved hjælp af simpel én-dimensional interpolation.

6.3.1 Koncentriske cirkler

En direkte implementering af formel (6.7), vil give et antal frekvens punkter for F, placeret på koncentriske cirkler som på figur 6.1.



Figur 6.1: Frekvens punkter på koncentriske cirkler.

For et vilkårlig punkt, (σ_p, γ_q) i spektret for f, kan de tilsvarende polære koordinater $(\nu_{p,q}, \theta_{p,q})$ udregnes som

$$\nu_{p,q} = \sqrt{\sigma_p^2 + \gamma_q^2}, \qquad \theta_{p,q} = \operatorname{atan2}(\sigma_p, \gamma_q)\,, \tag{6.12}$$

hvor funktionen $\operatorname{atan2}(a, b)$ returnerer vinklen for punktet (a, b) i intervallet $[-\pi; \pi]$. Et punkt (σ_p, γ_q), på det rektangulære raster spektrum, vil ligge imellem fire punkter på den polære raster spektrum som på figur 6.2. Hvis nærmeste nabo interpolation bruges, vil der for det nærmeste punkt (ν_k, θ_t), i det polære grid gælde at k og t kan findes som

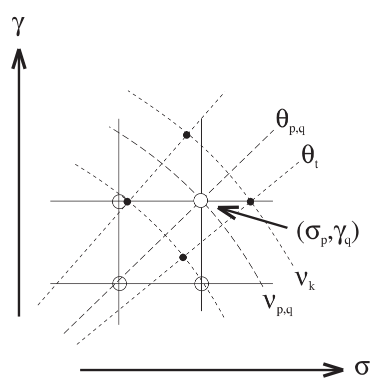
$$k = \operatorname{floor}\left(\frac{\nu_{p,q}}{\Delta\nu} + 0.5\right), \tag{6.13}$$

$$t = \operatorname{floor}\left(\frac{\theta_{p,q}}{\Delta\theta} + 0.5\right), \tag{6.14}$$

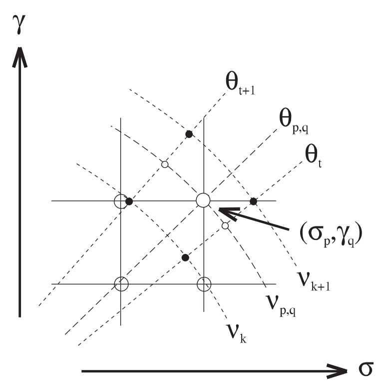
hvor $a = \operatorname{floor}(b)$ er afrunding til nærmeste heltal $b \in \mathbf{Z}$ hvor $b \leq a$. Dette giver

$$F(\sigma_p, \gamma_q) = \tilde{f}(\nu_k, \theta_t). \tag{6.15}$$

Nærmeste nabo interpolation viser sig normalt at en være en utilstrækkelig måde at udføre koordinat transformationen på. Ved at se på fordelingen af de diskrete frekvens punkter i det radiale raster spektrum ses, at denne type interpolation vil udnytte informationen i det polære spektrum meget dårligt, især omkring origo hvor mange samples ikke udnyttes.



Figur 6.2: Nærmeste nabo interpolation.



Figur 6.3: bi-lineær interpolation.

En anden og mere avanceret interpolations teknik der er blevet implementeret, er bi-lineær interpolation. Den bi-lineære interpolation er en vægtet sum af de fire nabo punkter til (σ_p, γ_q) på det polære grid, som på figur 6.3. Disse fire punkter betegnes (ν_k, θ_t), (ν_{k+1}, θ_t), (ν_k, θ_{t+1}) og $(\nu_{k+1}, \theta_{t+1})$, hvor k og t findes som

$$k = \text{floor}\left(\frac{\nu_{p,q}}{\Delta\nu}\right), \tag{6.16}$$

$$t = \text{floor}\left(\frac{\theta_{p,q}}{\Delta\theta}\right). \tag{6.17}$$

Interpolationen udføres, ved at for $\tilde{t} = t$ og $\tilde{t} = t + 1$ at udregne

$$\tilde{f}(\nu_{p,q}, \theta_{\tilde{t}}) = \frac{(\nu_{k+1} - \nu_{p,q})}{\Delta\nu}\tilde{f}(\nu_k, \theta_{\tilde{t}}) + \frac{(\nu_{p,q} - \nu_k)}{\Delta\nu}\tilde{f}(\nu_{k+1}, \theta_{\tilde{t}}), \tag{6.18}$$

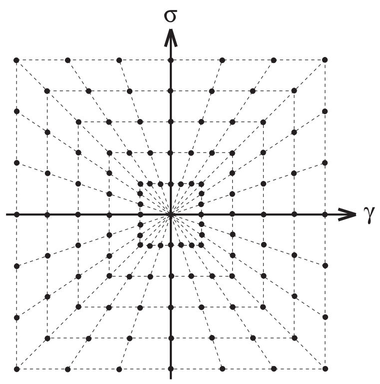
som er interpolation i ν-retningen. Derefter interpoleres der i θ-retningen med

$$F(\sigma_p, \gamma_q) = \frac{|\theta_{t+1} - \theta_{p,q}|}{\Delta\theta}\tilde{f}(\nu_{p,q}, \theta_t) + \frac{|\theta_{p,q} - \theta_t|}{\Delta\theta}\tilde{f}(\nu_{p,q}, \theta_{t+1}). \tag{6.19}$$

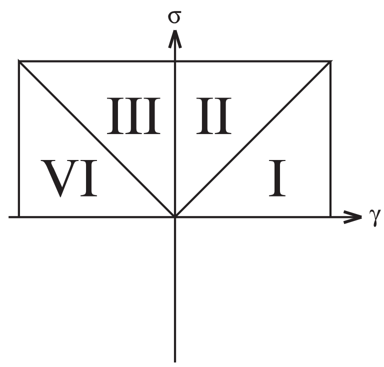
Den bi-lineære interpolation vil for høje frekvenser udnytte informationerne i det polære spektrum meget bedre end med nærmeste nabo interpolation, da der midles over fire punkter. Dette kan godt have en uheldig effekt, da det svarer til en midling af frekvenspunkterne, dvs. en foldning af det rekonstruerede billede med den frekvens transformerede af denne midling.

6.3.2 Koncentriske kvadrater

En måde at forbedre koordinat transformationen på er, ved at bruge ulineær sampling af Radon domænet, således at de diskrete frekvenspunkter kommer til at ligge på koncentriske kvadrater som på figur 6.4. Hvis samplingen foretages sådan, at disse kvadrater sammenfalder med de ønskede samples på det rektangulære spektrums raster grid, kan simpel én-dimensional



Figur 6.4: Frekvens punkter på koncentriske kvadrater.



Figur 6.5: Inddeling i områder

interpolation bruges til at finde frekvenspunkterne på det rektangulære raster grid. Ved lineær sampling af Radon rummet, bliver projektionerne samplet ækvidistant i θ. Som det ses på figur 6.4, skal projektionerne, for at danne de koncentriske kvadrater, samples ækvidistant i $\tan\theta$ hhv. $\cot\theta$. Da det fysisk kun er muligt at få projektioner samplet ækvidistant i θ, må disse re-samples. Ydermere ses at antallet af θ-samples bør være deleligt med fire. Ud fra det antal θ samples der er i det originale sinogram, dvs. T, vælges det mindste hele tal S deleligt med fire, hvor $S \geq T$. Dernæst defineres som på figur 6.5, følgende områder for $s = 0, 1, \ldots, S-1$

$$\begin{array}{lccccc} \text{område I:} & 0 & \leq & s & < & S/4 \\ \text{område II:} & S/4 & \leq & s & < & S/2 \\ \text{område III:} & S/2 & \leq & s & < & 3S/4 \\ \text{område VI:} & 3S/4 & \leq & s & < & S \end{array} . \tag{6.20}$$

De vinkler de nye projektioner skal dannes ved, vil for $s = 0, 1, \ldots, S-1$ være

$$\breve{\theta}_s = \begin{cases} \arctan\left(\frac{4s}{S}\right) & \text{for område I} \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(2 - \frac{4s}{S}\right) & \text{for område II} \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{4s}{S} - 2\right) & \text{for område III} \\ \pi - \arctan\left(4 - \frac{4s}{S}\right) & \text{for område VI} \end{cases} . \tag{6.21}$$

Derefter dannes et nyt sæt projektioner $\check{f}(\rho_r, \breve{\theta}_s)$, ved interpolere i $\check{f}(\rho_r, \theta_t)$. For hver s, findes et heltal t, $t \in \mathbf{Z}$ således at

$$\theta_t \leq \breve{\theta}_s \leq \theta_{t+1}, \tag{6.22}$$

hvorefter de interpolerede projektioner kan udregnes som

$$\check{f}(\rho_r, \breve{\theta}_s) = \frac{|\theta_{t+1} - \breve{\theta}_s|}{\Delta\theta} \check{f}(\rho_r, \theta_t) + \frac{|\breve{\theta}_s - \theta_t|}{\Delta\theta} \check{f}(\rho_r, \theta_{t+1}), \tag{6.23}$$

for $s = 0, 1, \ldots, S-1$. Dernæst udregnes Fourier transformationen af projektionerne på de koncentriske kvadrater med chirp-z transformationen som

$$\breve{f}(\breve{\nu}_k, \breve{\theta}_s) = \sum_{r=0}^{R-1} \check{f}(\rho_r, \breve{\theta}_s)\, e^{-j2\pi\Delta\Omega_\theta kr}, \tag{6.24}$$

for $k = 0, 1, \ldots, K-1$, hvor den vinkel afhængige samplings afstand $\Delta\Omega_\theta$, for $\breve{\nu}_k$, bestemmes af

$$\Delta\Omega_\theta = \begin{cases} \frac{1}{K|\cos\theta|} & \text{for område I + IV} \\ \frac{1}{K|\sin\theta|} & \text{for område II + III} \end{cases} . \tag{6.25}$$

For at undgå undersampling af projektionerne for vinkler omkring $\theta = \pi/4$ og $\theta = 3\pi/4$, skal antallet af punkter i spektret $P = Q$ være større end $2\sqrt{2}R$. Dette gøres i praksis ved at vælge $K > \sqrt{2}R$. Dette gøres i praksis ved valget af P og Q, da der skal gælde at antallet af koncentriske kvadrater skal svare til antallet af samples i spektret som $2K = P = Q$

Dernæst interpoleres der lineært mellem disse samples i σ- hhv. γ-retningen for de respektive områder. De polære koordinater for et vilkårligt punkt, (σ_p, γ_q), på det rektangulære grid, er igen

$$\nu_{p,q} = \sqrt{\sigma_p^2 + \gamma_q^2}\,, \qquad \theta_{p,q} = \operatorname{atan2}(\sigma_p, \gamma_q)\,. \tag{6.26}$$

For hver (σ_p, γ_q), findes en vinkel $\breve{\theta}_s$, hvor $s \in \mathbf{Z}$, således at

$$\breve{\theta}_s \leq \theta_{p,q} \leq \breve{\theta}_{s+1}. \tag{6.27}$$

Da der vil være sammenfald mellem første-koordinaterne for punkterne på de koncentriske kvadrater og punkterne på det rektangulære raster grid i område I og IV, og for anden-koordinaterne i område II og III, kan interpolationen laves én-dimensionalt i de respektive områder. For alle (σ_p, γ_q) hvor $\nu_{p,q} \leq 1/(2\Delta\rho)$, udregnes de interpolerede punkter som

$$\begin{aligned} F(\sigma_p, \gamma_q) &= \left|\frac{\breve{\theta}_{s+1} - \theta_{p,q}}{\breve{\theta}_{s+1} - \breve{\theta}_s}\right| \breve{f}(\sigma_p, \breve{\theta}_s) + \left|\frac{\theta_{p,q} - \breve{\theta}_s}{\breve{\theta}_{s+1} - \breve{\theta}_s}\right| \breve{f}(\sigma_p, \theta_{s+1}) \quad \text{for område I + VI} \\ F(\sigma_p, \gamma_q) &= \left|\frac{\breve{\theta}_{s+1} - \theta_{p,q}}{\breve{\theta}_{s+1} - \breve{\theta}_s}\right| \breve{f}(\gamma_q, \breve{\theta}_s) + \left|\frac{\theta_{p,q} - \breve{\theta}_s}{\breve{\theta}_{s+1} - \breve{\theta}_s}\right| \breve{f}(\gamma_q, \breve{\theta}_{s+1}) \quad \text{for område II + III} \end{aligned} \tag{6.28}$$

Der er ingen frekvenser for ρ_k større end den halve samplings frekvens, derfor sættes $F(\sigma_p, \gamma_q)$ til nul i de områder i det polære spektrum hvor $\nu_{p,q} > 1/(2\Delta\rho)$.

Denne metode har eksperimentelt vist sig at være de to-dimensionale interpolerings teknikker overlegen med hensyn til rekonstruktions kvalitet, selv om der både interpoleres i re-samplingen og i koordinat transformationen. Dette skyldes, at et sinogram er lavfrekvent i forhold til det dannede spektrum, og interpolation i dette vil derfor være ukritisk. Samtidig ændres den kritiske interpolation i spektret til én-dimensional interpolation.

6.4 Inversion af spektret

I de følgende afsnit vil det blive gennemgået, hvorledes det to-dimensionale spektrum for f, kan Fourier transformeres med zoom i outputbilledet, samt hvorledes undersamplings problemer i forbindelse med genereringen af spektret undgås. Der er implementeret to metoder til invertering af det to-dimensionale spektrum. En almindelig FFT metode, samt en metode baseret på chirp-z transformationen. Begge metoder giver mulighed for zoom i output billedet.

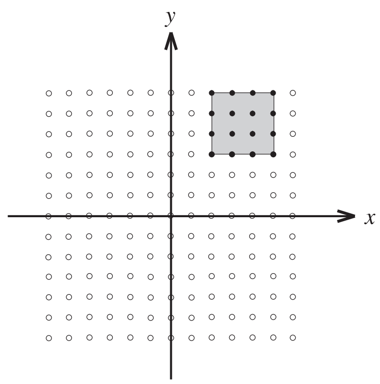
6.4.1 Fourier invertering

Der er implementeret en rutine, der kan udføre invers to-dimensional Fourier transformation, med en to-dimensional udgave af den hurtige Fourier transformation. Da denne er *nul-centreret*, dvs. transformationen foretages på billeder hhv. spektre der er centreret omkring origo, skal der bruges specielle metoder til at opnå zoom i output billedet. Den almindelige inverse diskrete to-dimensionale Fourier transformation kan skrives som

$$f(x_m, y_n) = \frac{1}{\Delta x \Delta y M N} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} F(\sigma_p, \gamma_q)\, e^{j2\pi(pm/P+qn/Q)}, \tag{6.29}$$

hvor $n = 0, 1, \ldots, N$ og $m = 0, 1, \ldots, M$. P og Q er antallet af σ hhv. γ samples. I praksis vil være gældende, at $P = M$ og $Q = N$ er eksponenter af to, da der anvendes radix-2 baserede FFT rutiner.

Hvis et vilkårlig udsnit af et billede skal rekonstrueres, er det ikke givet, at dette ligger centreret omkring origo. Derfor forstørres det område der skal rekonstrueres til det mindste område centreret omkring $(0, 0)$ der inkluderer hele f. Denne metode kræver dog, at udvidelsen af billedets dimensioner (se figur 6.6) vil kunne komme til at indeholde punktet $(0, 0)$ i det diskrete raster grid, dvs. der skal eksistere to tal $a, b \in \mathbf{Z}$, for hvilke $x_{min} + a\Delta x = 0$ og $y_{min} + b\Delta y = 0$ er opfyldt. Samplings afstandene for output billedet, Δx og Δy, er fastlagte, dvs. for spektret vil $\sigma_{min} = -1/(2\Delta x)$ og $\gamma_{min} = -1/(2\Delta y)$ være bestemt.



Figur 6.6: Udvidelse af billede, de mørke punkter tilhører interesse området, de lyse punkter er nødvendig udvidelse.

Spektret dannes ved to-dimensional interpolation mellem et polært raster grid, og et rektangulært raster grid. Samplingsparametrene for det polære raster grid, vil være bestemt af samplingen af ρ som

$$\Delta\nu = \frac{1}{R\Delta\rho}, \qquad \nu_{min} = \frac{-1}{2\Delta\rho}. \tag{6.30}$$

For at undgå undersampling i koordinat transformationen for vinkler omkring $\theta = \pi/4$ og $\theta = 3\pi/4$, skal der for det rektangulære raster spektrums samplingsparametre gælde at

$$\Delta\sigma = \frac{1}{M\Delta x} < \frac{\Delta\nu}{\sqrt{2}}, \qquad \Delta\gamma = \frac{1}{N\Delta y} < \frac{\Delta\nu}{\sqrt{2}}. \tag{6.31}$$

Hvis dette ikke er opfyldt, vil der forekomme aliasing fejl i det rekonstruerede billede, da ν vil blive undersamplet. Er dette tilfældet må M og N udvides yderligere. Den implementerede invertering rutine gør opmærksom på sådanne forhold der vil føre til undersampling.

Det genererede spektrum inverteres derefter med en IFFT rutine, og det rekonstruerede billede kan findes ved at fjerne de punkter der er blevet lagt til, for at få samplingsparametrene til at passe. Den samlede metode til Fourier invertering kan opridses som:

- Find samplingsparametrene på det udvidede billede af f, der indeholder punktet $(0,0)$, er centreret omkring origo, og har sidelængder der er eksponenter af to.
- Find samplingsparametrene på det tilhørende spektrum F, der ved invers Fourier transformation vil danne f, uden at undersample ν i koordinattransformationen. Udvid eventuelt f yderligere for at undgå undersampling.
- Koordinat transformér punkterne fra det polære raster spektrum over på det valgte rektangulære raster spektrum.
- Invers Fourier transformér spektret, for at få det udvidede billede.
- Klip de overskydende billedpunkter fra for at få det rekonstruerede billede f.

Denne metode til spektral inversion, bruges kun sammen med nærmeste nabo og bi-lineær interpolation. En anden metode til at simplificere genereringen af zoom i output billedet med er, ved at fasedreje spektret således at interesseområdet i output billedet flyttes til omkring origo (se Schalkoff [Sch89]). Denne metode er dog ikke blevet afprøvet.

6.4.2 Chirp-z invertering

I forbindelse med koordinat transformation med chirp-z rutinen er blevet lavet en rutine, der kan udføre invers diskret Fourier transformation på et vilkårligt spektrum ved hjælp af chirp-z transformationen (se Rabiner og Schafer [Rab69]). Der bliver i samme arbejdsgang udført zoom i outputbilledet, da der gøres brug af chirp-z transformationens muligheder som beskrevet i appendix A. Den implementerede to-dimensionale inverse z-transformation kan skrives som

$$f(x_m, y_n) = \frac{1}{\Delta x \Delta y M N} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} F(\sigma_p, \gamma_k)\, e^{j2\pi((\theta_x p - \phi_x m p) + (\theta_y q - \phi_y n q))}, \tag{6.32}$$

hvor der gøres brug af chirp-z algoritmens mulighed for at transformere med vilkårlige sekvenslængder, med valgfri samplingafstand og startpunkt på enhedscirklen. Hvis $\hat{f}(x_{\hat{m}}, y_{\hat{n}})$, er det billede der fås ved en almindelig diskret Fourier transformation af F og samplet som

$$\begin{aligned} x_{\hat{m}} &= \hat{x}_{min} + \hat{m}\Delta\hat{x}, & \hat{m} &= 0, 1, \ldots, \hat{M}-1, \\ y_{\hat{n}} &= \hat{y}_{min} + \hat{n}\Delta\hat{y}, & \hat{n} &= 0, 1, \ldots, \hat{N}-1, \end{aligned} \tag{6.33}$$

vil parametrene ϕ og θ forholde sig til dette billede som

$$\phi_x = \frac{\Delta x}{\hat{M}\Delta\hat{x}}, \qquad \phi_y = \frac{\Delta y}{\hat{N}\Delta\hat{y}}, \tag{6.34}$$

og

$$\theta_x = \frac{x_{min}}{\hat{x}_{min}}, \qquad \theta_y = \frac{y_{min}}{\hat{y}_{min}}. \tag{6.35}$$

Hvis $\hat{f}$'s parametre omregnes til frekvens domænet, kan formel (6.34) og formel (6.35) omskrives til

$$\phi_x = \Delta x \Delta\sigma, \qquad \phi_y = \Delta y \Delta\gamma, \tag{6.36}$$

og

$$\theta_x = 2\, x_{min}\Delta\sigma \qquad \theta_y = 2\, y_{min}\Delta\gamma. \tag{6.37}$$

Denne måde at udføre Fourier inversion af spektret på er mere fleksibel end Fourier metoden, når der skal bruges zoom i output billedet. Kompleksiteten af inversion med chirp-z transformationen er proportional med spektrets og output billedets størrelser, hvorimod inversion med Fourier metoden er proportional med det udvidede outputbillede og spektrets størrelse. Hvis der skal zoom'es meget ind på en lille struktur med fin opløsning, vil chirp-z metoden derfor være mindre krævende end Fourier metoden.

Da chirp-z transformations rutine er implementeret med brug af tre FFT udregninger for hver udregning af én chirp-z transformation, vil hastigheden ved brug af denne være over tre gange langsommere end en tilsvarende FFT metode med samme billedstørrelser.

6.5 Resumé

I dette kapitel er de direkte Fourier metoder til rekonstruktion af PET billeder blevet gennemgået. Det er blevet vist at der er flere måder hvormed den kritiske interpolation i det polære spektrum kan foretages. Der er ligeledes blevet gennemgået to forskellige metoder at foretage zoom i outputbilledet med, ved brug af den inverse to-dimensionale Fourier transformation hhv. chirp-z transformationen, hver med sine fordele.

Kapitel 7

Filtrerede tilbageprojektions metoder

I dette kapitel vil to filtrerede tilbageprojektions metoder blive gennemgået, den ofte anvendte *Filtered Backprojection* algoritme og *Filtering after Backprojection* algoritmen. Den numeriske implementering af metoderne vil blive gennemgået.

7.1 Filtered Backprojection metoden

Til at udlede Filtered Backprojection algoritmen med, vil sammenhængen mellem Fourier transformationen og Radon transformationen blive udnyttet. Parallelt med udledningen af Fourier Slice teoremet, bruges det to-dimensionale spektrum af det rekonstruerede billede til udledningen af Filtered Backprojection algoritmen. Spekteret $F(\sigma, \gamma)$ for det rekonstruerede billede $f(x, y)$ findes med den to-dimensionale Fourier transformation som

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma,\gamma) e^{j2\pi(\sigma x+\gamma y)}\, d\sigma\, d\gamma. \tag{7.1}$$

Hvis denne formel udtrykkes i polære koordinater (ν, θ), kan Fourier transformationen skrives som

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\nu|\ F(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta) e^{j2\pi\nu(x\cos\theta+y\sin\theta)}\, d\nu\, d\theta. \tag{7.2}$$

Med indsættelse af formel (6.5) i formel (7.2) fås

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\nu| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\rho,\theta)\, e^{-j2\pi\rho\nu}\, d\rho \right] e^{j2\pi\nu(x\cos\theta+y\sin\theta)}\, d\nu\, d\theta && (7.3) \\ &= \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\nu| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\tilde{\rho},\theta)\, e^{-j2\pi\tilde{\rho}\nu} d\tilde{\rho} \right] e^{j2\pi\nu\rho}\, d\nu \right]_{\rho\to x\cos\theta+y\sin\theta} d\theta, && (7.4) \end{aligned}$$

hvor $\check{f}(\rho, \theta)$ er det givne sinogram. Denne formel kan deles op i to processeringstrin, der kan skrives som

$$\begin{aligned} f^{\dagger}(\rho,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\nu| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\tilde{\rho},\theta)\, e^{-j2\pi\tilde{\rho}\nu}\, d\tilde{\rho} \right] e^{j2\pi\rho\nu} d\nu && (7.5) \\ &= \mathrm{IFT}_{\nu\to\rho} \left\{ |\nu|\, \mathrm{FT}_{\tilde{\rho}\to\nu} \{ \check{f}(\tilde{\rho},\theta) \} \right\} && (7.6) \end{aligned}$$

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} f^{\dagger}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\, d\theta. \tag{7.7}$$

Hvor første del i formel (7.6) er en frekvens filtrering af Radon rummet, og anden del, formel (7.7) er en integration i det filtererde sinogram langs sinus kurver. Denne del af en filtreret tilbageprojektions metode bliver i litteraturen betegnet *tilbageprojektionen*. Filtered Backprojection algoritmen består dermed af to trin som

1) Filtrering af sinogrammet i ρ-retningen, for hver θ.

2) Tilbageprojektion af det filtrerede Radon-rum.

Begge disse trin har specielle problemer der bør bemærkes. Filtreringen af sinogrammet i frekvensdomænet bliver foretaget med den numeriske værdi af frekvensparametreren ν som $|\nu|$. Dette filter introducerer flere problemer i rekonstruktionen, da det har uendelig udstrækning hvilket ikke kan implementeres diskret, men nødvendigvis må implementeres båndbegrænset. I følge Pedersen [Ped92] svarer dette filter til en partiel differentiation i det spatiale domæne, efterfulgt af en én-dimensional foldning med $1/\rho$, også kaldet en Hilbert transformation. Denne behandling af sinogrammet vil forstærke de høje frekvenser. Hvis der bruges en klassisk indgangsvinkel til spektral estimation, bør sinogrammet vægtes med en vindues funktion (se Harris [Har78]) før transformation til frekvensdomænet. Dette vil afhjælpe højfrekvens problemer. Sådanne forhold er diskuteret i rapportens del III.

Efter tilbagetransformationen til Radon domænet, skal der foretages en numerisk integration i sinogrammet over sinuskurver. I praksis bruges der lineær interpolation mellem ρ-værdierne, da der kun er diskrete værdier af (ρ, θ) til rådighed. Dette er ikke kritisk, da sinogrammet på trods af differentiationen stadigvæk er meget lavfrekvent.

7.2 Filtering after Backprojection metoden

Ved først at foretage tilbageprojektionen fra sinogrammet til det spatiale domæne, og dernæst at filtrere, fås en variant af Filtered Backprojection metoden, *Filtering after Backprojection*. Da Radon transformationen er en lineær transformation vil der blive set på et enkelt punkt (x_0, y_0) ad gangen. Den Radon transformerede af et punkt er som tidligere vist en sinuskurve i Radon-rummet. Hvis

$$f(x,y) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0) \tag{7.8}$$

fås ifølge formel (2.12)

$$\check{f}(\rho,\theta) = \delta(\rho - x_0\cos\theta - y_0\sin\theta). \tag{7.9}$$

Ved at tilbageprojektere denne på samme måde som i formel (7.6) fås

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x,y) &= \int_0^\pi \check{f}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\, d\theta && (7.10)\\
&= \int_0^\pi \delta((x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta)\, d\theta && (7.11)\\
&= \left.\frac{1}{|(x-x_0)\sin\theta - (y-y_0)\cos\theta|}\right|_{(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta=0} && (7.12)\\
&= \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}. && (7.13)
\end{aligned}$$

Hvor følgende relation (se f.eks. Toft [Tof94b]) er benyttet

$$\int \delta(g(x))dx = \left.\frac{1}{|g'(x)|}\right|_{g(x)=0}. \tag{7.14}$$

Formel (7.13) svarer, pga. lineariteten til at folde det originale signal f med den to-dimensionale filterkerne $h(x, y)$ som

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) ** h(x, y), \tag{7.15}$$

hvor $**$ er den to-dimensionale foldning, og filteret h er

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{7.16}$$

Da en foldning i det spatiale domæne svarer til en multiplikation i frekvens domænet fås

$$\tilde{F}(\sigma, \gamma) = F(\sigma, \gamma)\, H(\sigma, \gamma) \rightarrow \tag{7.17}$$

$$F(\sigma, \gamma) = \frac{\tilde{F}(\sigma, \gamma)}{H(\sigma, \gamma)}, \tag{7.18}$$

hvor $H(\sigma, \gamma)$, den Fourier transformerede af det to-dimensionale filter h er

$$H(\sigma, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2}} \tag{7.19}$$

Dette er igen en højpas filterering, blot i to dimensioner. En Filtering after Backprojection algoritme bestemmer således $f(x, y)$ som

$$\tilde{f}(x, y) = \int_0^\pi \check{f}(x \cos\theta + y \sin\theta, \theta)\, d\theta \tag{7.20}$$

$$\tilde{F}(\sigma, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x, y)\, e^{-j2\pi(\sigma x + \gamma y)}\, dx\, dy \tag{7.21}$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\sigma^2 + \gamma^2}\, \tilde{F}(\sigma, \gamma)\, e^{j2\pi(\sigma x + \gamma y)}\, d\sigma\, d\gamma. \tag{7.22}$$

Algoritmen for Filtering after Backprojection kan således også deles op i to trin som

1) Tilbageprojektion af det ufiltrerede sinogrammer.

2) To-dimensional filtrering.

Den to-dimensionale filtrerings del af denne algoritme, ses at bruge samme type filter som i Filtered Backprojection, blot en to-dimensional rotations symmetrisk version af dette. Filtreringen vil have samme de samme effekter som omtalt under Filtered Backprojection afsnittet, men er dog ikke så kritisk i praksis, da den tilbageprojektion der foretages før filtereringen har lavpas karakteristika.

I teorien er Filtering after Backprojection algoritmen magen til Filtered Backprojection, men ved en implementering må det forventes at den anden rækkefølge af de to processerings trin vil give denne algoritme andre egenskaber. En ulempe ved Filtering after Backprojection er at frekvens filtreringen fjerner DC-værdien i output billedet.

7.3 Numerisk implementering

I de følgende afsnit vil den numeriske implementering af de to beskrevne filtrerede tilbageprojektions metoder blive beskrevet. Implementering af tilbageprojektionen vil blive behandlet seperat, da den er fælles for begge rutiner.

7.3.1 Tilbageprojektion

Sinogrammet $\check{f}(\rho, \theta)$, kan i det diskrete tilfælde skrives som $\check{f}(\rho_r, \theta_t)$, hvor

$$\begin{array}{rclrcl} \rho_r & = & \rho_{min} + r\Delta\rho, & r & = & 0, 1, \ldots, R-1, \\ \theta_t & = & \theta_{min} + t\Delta\theta, & t & = & 0, 1, \ldots, T-1, \end{array} \tag{7.23}$$

Dette sinogram skal tilbagetransformeres til det diskrete spatiale domæne $f(x_m, y_n)$, samplet som

$$\begin{array}{rclrcl} x_m & = & x_{min} + m\Delta x, & m & = & 0, 1, \ldots, M-1, \\ y_n & = & y_{min} + n\Delta y, & n & = & 0, 1, \ldots, N-1. \end{array} \tag{7.24}$$

Tilbagetransformationen i formel (7.6), kan approksimeres med en diskret sum

$$f(x_m, y_n) = \Delta\theta \sum_{t=0}^{T-1} \check{f}(x_m \cos\theta_t + y_n \sin\theta_t, \theta_t), \tag{7.25}$$

denne form er ikke praktisk realisérbar, da den vil kræve punkter for $\check{f}$ der ikke ligger på det diskrete grid. I stedet må der bruges lineær interpolation i ρ-retningen for hver θ_t. For et givet punkt (x_m, y_n) i det spatiale domæne findes en afstand ρ_t som

$$\rho_t = x_m \cos\theta_t + y_n \sin\theta_t. \tag{7.26}$$

For denne ρ_t findes et heltal s, $s \in \mathbf{Z}$ således at

$$\rho_s \leq \rho_t \leq \rho_{s+1}. \tag{7.27}$$

Den interpolerede værdi $\check{f}(\rho_t, \theta_t)$ for punktet ρ_t defineres dernæst som

$$\check{f}(\rho_t, \theta_t) = \frac{(\rho_{s+1} - \rho_t)}{\Delta\rho} \check{f}(\rho_{s+1}, \theta_t) + \frac{(\rho_t - \rho_s)}{\Delta\rho} \check{f}(\rho_s, \theta_t). \tag{7.28}$$

Summationen i formel (7.25) med lineær interpolation kan således skrives

$$f(x_m, y_n) = \Delta\theta \sum_{t=0}^{T-1} \check{f}(x_m \cos\theta_t + y_n \sin\theta_t, \theta_t). \tag{7.29}$$

Denne tilbagetransformation er meget beregningskrævende, da summationen skal udføres for hvert diskret punkt i det tilbagetransformerede billede.

7.3.2 Filtrering i Filtered Backprojection

En diskret implementering af filteringen i en Filtered Backprojection algoritme som i formel (7.5), kan ved at bruge den diskrete Fourier transformation skrives som

$$\begin{aligned} \check{F}(\nu_k, \theta_t) &= \Delta\rho \sum_{r=0}^{R-1} \check{f}(\rho_r, \theta_t) e^{-j2\pi rk/R}, && (7.30) \\ f^{\dagger}(\rho_r, \theta_t) &= \Delta\nu \sum_{k=0}^{K-1} \left(H_{HP}(\nu_k) \check{F}(\nu_k, \theta_t) \right) e^{j2\pi kr/K}, && (7.31) \end{aligned}$$

hvor den diskrete frekvens parameter for ρ, ν_k er samplet som

$$\nu_k = \nu_{min} + k\Delta\nu, \qquad k = 0, 1, \ldots, K-1, \tag{7.32}$$

og den diskrete frekvensfiltrering[1] $F_{HP}(\nu_k)$ er implementeret som

$$H_{HP}(\nu_k) = |\nu_k|, \qquad k = 0, 1, \ldots, K-1. \tag{7.33}$$

[1] Frekvens filteret $|\nu_k|$, bliver også kaldt et *Ram-Lak* filter.

7.3.3 Filtrering i Filtering after Backprojection

Der skal i Filtering after Backprojection foretages en to-dimensional filtrering i det diskrete spektrum for $f(x_m, y_n)$. Ved brug af den diskrete Fourier transformation, kan dette skrives som

$$\tilde{F}(\sigma_p, \gamma_q) = \Delta x \Delta y \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}(x_m, y_n) e^{-j2\pi(mp/M + nq/N)}, \tag{7.34}$$

hvor de diskrete frekvens parametre σ_p og γ_q er samplet som

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sigma_{min} + p\Delta\sigma, & p &= 0, 1, \ldots, P-1, \\ \gamma_q &= \gamma_{min} + q\Delta\gamma, & q &= 0, 1, \ldots, Q-1, \end{aligned} \tag{7.35}$$

og det to-dimensionale filter $F_{HP}(\sigma_p, \gamma_q)$, den reciprokke diskrete udgave af formel (7.19) er

$$H_{HP}(\sigma_p, \gamma_q) = \sqrt{{\sigma_p}^2 + {\gamma_q}^2}. \tag{7.36}$$

Dermed kan det rekonstruerede billede findes som den inverst Fourier transformerede af produktet af $\tilde{F}$ og H_{HP} som

$$f(x_m, y_n) = \Delta\sigma\Delta\gamma \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \left(H_{HP}(\sigma_p, \gamma_q) \tilde{F}(\sigma_p, \gamma_q) \right) e^{j2\pi(pm/P + nq/Q)}. \tag{7.37}$$

7.4 Zoom i outputbilledet

At foretage zoom i outputbilledet med den almindelige Filtered Backprojection algoritme er bare et spørgsmål om at evaluere tilbageprojektionen i formel (7.29) i de punkter der ønskes i outputbilledet. Beregnings kompleksiteten vil derfor være en lineær funktion af antallet af punkter i output billedet.

I Filtering after Backprojection, skal det tilbageprojekterede billede have sidelængder der er eksponenter af 2 da der bruges radix-2 baserede FFT rutiner til frekvens filtereringen. Dette gør at kompleksiteten af Filtering after Backprojection algoritmen bliver større end Filtered Backprojection, da det kan blive nødvendigt at tilbagetransformere op til fire gange så mange punkter ved uheldige valg af M og N. Efter filtreringen, skæres de overflødige punkter fra, parallelt med den metode der bruges til Fourier invertering i Central Slice rutinen.

7.5 Resumé

I dette kapitel er gennemgået Filtered Backprojection og Filtering after Backprojection algoritmerne. Den numeriske implementering af disse er blevet vist. Filtered Backprojection algoritmens store udbredelse i kommercielle skannere kan ud fra et implementerings mæssigt synspunkt nemt forstås, da den er ligefrem at implementere og nem at parallelisere. Al den kritiske databehandling foregår i det spatiale domæne fremfor i frekvensdomænet, hvilket gør algoritmen meget stabil.

Kapitel 8

Generering af testdata

I dette kapitel vil blive brugen af kunstige testdata, *fantomer* i PET, blive beskrevet. Der vil blive gjort rede for hvorledes de brugte testdata genereres, og baggrunden for valget af de fantomer der er blevet brugt til at teste rekonstruktions algoritmerne med.

8.1 Brugen af fantomer

PET skanning giver mulighed for ikke indtrængende, kvantitative målinger af lokale vævsområders koncentration af positron emitterende stoffer dvs. den rumlige aktivitet. Disse muligheder kan kun udnyttes optimalt, hvis der er en grundliggende forståelse for alle karakteristika ved selve PET processen. Disse karakteristika er bla. afhængige af selve PET skannerens design, det positron emiterende stofs biokemiske opførsel i vævet og den brugte rekonstruktions algoritmes numeriske egenskaber.

De analytiske formler designet til billedrekonstruktion fra projektioner tillader, på et teoretisk niveau, en karakterisering af rekonstruktionsfejlene under forskellige analytisk veldefinerede forhold. Selvom sådanne karakteriseringer giver vigtige teoretiske grænser for metoderne der udvikles, kan disse ikke overføres effektivt til den endelige digitale signal processering. Dette nødvendiggør testkørsler med simulerede data, hvor alle faktorer er kendte. Igennem tiden er der derfor blevet brugt både fysiske og computergenererede fantomer til at simulere og undersøge de forskellige trin i PET processen med.

Det primære formål med dette projekt er at sammenligne og kvalitetsvurdere forskellige rekonstruktions algoritmer i forhold til hinanden. Derfor er de computergenererede fantomer meget centrale, og det er nødvendigt med en høj grad af forståelse for de problemer brugen af disse indebærer.

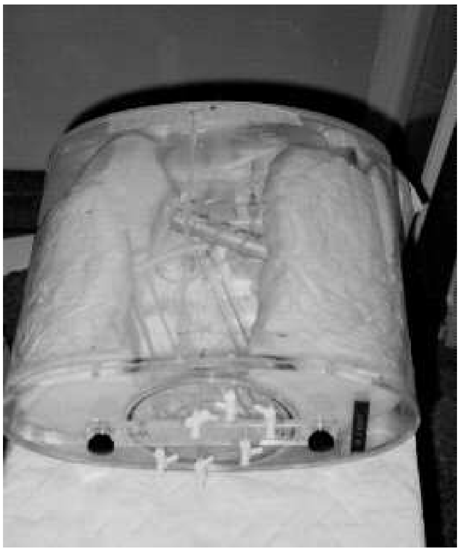
De spørgsmål computergenererede fantomer kan bruges til at besvare er:

- Hvilke numeriske problemer mødes der ved invertering af Radon transformationen?
- Hvilken nøjagtighed kan forventes, afhængigt af nøjagtigheden af de målte data?
- I hvor høj grad er den søgte distribution bestemt af et endeligt antal målinger?
- Er det muligt at genskabe den søgte distribution hvis de målte data er ufuldstændige?

De vigtigste resultater man får ved simuleringer med fantomer, vil dreje sig om identificering og nedbringelse af rekonstruktions algoritmernes fejl. Disse resultater kan bruges til at finde de optimale rekonstruktionsparametre for data med og uden støj, med hensyn til rekonstruktionernes nøjagtighed, følsomhed og rekonstruktionshastigheden.

8.2 Fysiske fantomer

Fysiske fantomer kan være udført i plastik, og konstrueret således at de immiterer et organ. Hule områder i fantomet fyldes med radioaktive opløsninger evt. med flere forskellige aktivitetsniveauer, og fantomet skannes dels for at kalibrere PET udstyret, dels for at afsløre målefejl og unøjagtigheder. PET centeret på Rigshospitalet råder bla. over to fysiske fantomer, et hjertefantom, og et hjernefantom. Disse er vist på figur 8.1 og 8.2.



Figur 8.1: Hjertefantom.

Figur 8.2: Hjernefantom.

8.3 Computergenererede fantomer

For at kunne teste de udviklede rekonstruktions algoritmer kræves et sæt projektioner, og viden om hvad disse projektioner repræsenterer. Hvis et fysisk fantom skannes og projektionerne rekonstrueres, vil emissions intensiteten til en vis grad være bestemmende for udseendet af det rekonstruerede billede. Problemet med de projektioner der kan fås fra selve PET skanneren er, at de vil være støjfyldte og have meget udefinerede egenskaber, grundet alle de kendte og ukendte processer de har været igennem. Rekonstruktion af disse data, vil derfor ikke kunne besvare spørgsmålene stillet i afsnit 8.1, da der er alt for mange ukendte størrelser at holde rede på. Ud over det er fysiske fantomer dyre og tidskrævende at fremstille, hvilket sætter naturlige begrænsninger for fleksibilititen ved brug af disse.

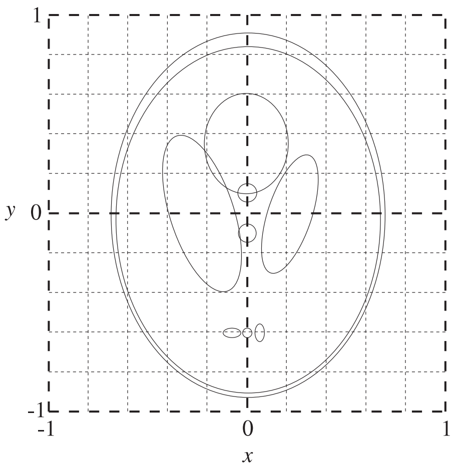
Løsningen er, at bruge computergenererede fantomer til at teste rekonstruktionsprocessen med. Computeren genererer et sæt projektioner ud fra en reference-figur, det kan være et billede eller en figur defineret analytisk ved hjælp af geometriske primitiver. Det er disse to metoder til Radon transformation, der vil blive set nærmere på her. Fremover vil generering af projektioner ud fra analytisk definerede primitiver blive betegnet *analytisk* Radon transformation, og generering ud fra diskrete billeder *numerisk* Radon transformation.

Et sinogram optaget på en PET skanner genereres som vist i afsnit 3 ved at optælle hvor mange henfald der sker langs en række diskrete sammenfaldslinier. Mange fysiske fænomener gør, at denne proces ikke kan modelleres præcist, såsom endeligt brede detektorer og scatter problemer. Ud over disse utilstrækkeligheder skal den ønskede projektion præsenteres med et endelig antal punkter på et samplet grid. Her vil diskussionen blive begrænset til de problemer, der er i at arbejde med et diskret estimat, og hvorledes disse kan minimeres i praksis. Mange fysiske problemer kan godt indkorporeres med komplicerede modeller, men disse skal også overholde resultatet af denne diskussion.

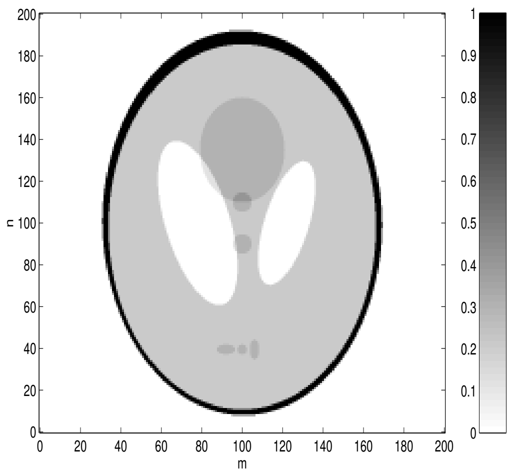
8.3.1 Analytisk genererede fantomer

Ved at bruge den analytiske Radon transformation til at generere fantomer med, kan der konstrueres fantomer der består af summen af en række simple objekter som ellipser og firkanter. De analytiske fantomer har den fordel, at de er helt nøjagtige repræsentationer af den Radon-transformerede i de diskrete punkter der bliver udregnet.

Et eksempel på et fantom der udelukkende er genereret med ellipser, er *Shepp-Logan* fantomet (se figur 8.3 og 8.4), en simpel approksimation af et snit gennem et hoved, beskrevet i Shepp og Vardi, [She82]. Dette fantom er udviklet i forbindelse med algoritmer til CT udstyr, dvs. intensiteten i billedet repræsenterer dæmpningen igennem vævet.



Figur 8.3: Ellipserne i Shepp-Logan fantomet.



Figur 8.4: Intensiteten af Shepp-Logan fantomet.

Et stort problem i tomografi er aliasing grundet undersampling af billedet og projektionerne med medfølgende artifakter i det rekonstruerede billede. At objekterne er begrænset i rumlig udstrækning gør, at de ikke kan være båndbegrænsede. En måde at formindske undersamplings problemerne i den analytiske Radon transformation er ved at oversample i Radon-rummet. Dette gøres ved, at der for hver ønsket diskret værdi af ρ og θ udregnes den Radon transformerede for f.eks. 3 eller 5 integrationsveje tæt ved hinanden. Disse midles derefter for at få det endelige estimat.

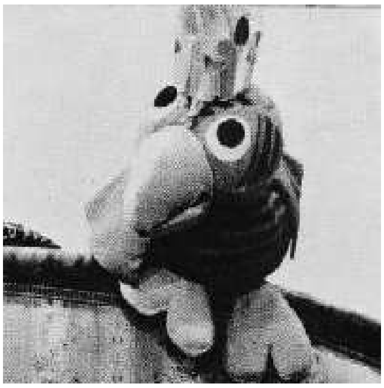
8.3.2 Numerisk genererede fantomer

Konstruktion af et sinogram ud fra et diskret billede, repræsenterende en dæmpning eller en emissionsintensitet, kan foretages ved hjælp af Radon transformationen som vist i formel (2.6). Dette bliver i litteraturen ofte benævnt *re-projection* eller *forward-projection* , og bliver ofte brugt af iterative og tre-dimensionale rekonstruktions metoder, se bla. Guerrero [Gue93] og Peters [Pet81].

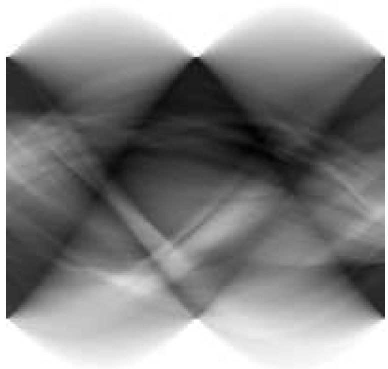
Der er flere forskellige måder hvormed man kan generere projektioner med re-projektion. De mest almindelige fremgangsmåder er almindelig numeriske integration, med forskellige interpolations teknikker, der bruges for at approksimere den ideelle integration.

Ligesom ved den analytiske Radon transformation vil et sinogram direkte genereret ud fra et billede være undersamplet. Dette gør, at der også ved den numeriske Radon transformation skal foretages en oversampling med efterfølgende midling for at få bedre projektionsdata.

De numeriske genererede fantomer kan i sagens natur ikke blive så nøjagtige som de analytisk genererede, hvis der skal transformeres veldefinerede geometriske figurer. Disse skal først diskretiseres og derefter integereres numerisk. Fordelen ved den numeriske Radon transformation er derimod, at et hvilket som helst fantom der kan præsenteres som et diskret billede kan Radon transformeres som på figur 8.5 og 8.6, hvor et almindeligt gråtone billede er blevet Radon transformeret.



Figur 8.5: 'Andrea'.



Figur 8.6: Sinogram af 'Andrea'.

8.3.3 Referencebilleder

For at have noget at sammenligne de rekonstruerede billeder med, skal det billede projektionerne er udregnet fra, også genereres. For de numerisk genererede fantomer er dette ligetil da det billede projektionerne udregnes fra er referencebilledet.

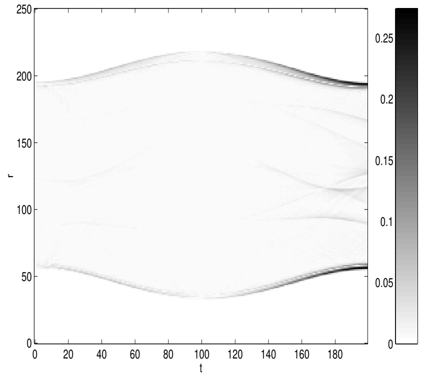
For de analytiske fantomer skal der konstrueres et billede svarende til de geometriske figurer, der er transformeret analytisk. Dette kan meget nemt produceres, da alle koordinater for elementerne i billedet kendes, alt der skal oplyses er samplingsparametrene for reference billedet.

8.4 Sammenligning

De to omtalte metoder til generering af Radon transformations-par, er hver for sig i stand til at generere data der fuldt ud vil opfylde vores krav til kvaliteten af disse, hvis de er implementeret korrekt. I litteraturen bliver den analytiske metode overvejende brugt, men mange bruger også numeriske fantomer uden at ofre særlig opmærksomhed på dette. Mahoney [Mah87] argumenterer kraftigt for brugen af realistiske numeriske fantomer, uanset at udviklingen af sådanne kræver langt mere tid og resscourcer, fremfor de mere 'simple' geometrisk definerede fantomer.

Der er blevet udviklet rutiner til at udføre både numerisk og analytisk Radon transformation. Til at teste vores rekonstruktions rutiner med er der dog udelukkende blevet brugt analytisk genererede fantomer, grundet den store fleksibilitet der er med hensyn til samplingsparametre og generering af referencebilleder med forskellige dimensioner.

For at undersøge forskellen på de to metoder, er et Shepp-Logan fantom, blevet Radon transformeret analytisk (oversamplet tre gange). Det genererede reference billede er derefter blevet numerisk Radon transformeret med de samme samplingsparametre i Radon rummet. På figur 8.7 er vist et forskelsbillede mellem de to sinogrammer. Middelintensiteten af dette er ca. 1.5% af et af sinogrammerne, og maksimal værdien ca. 46% af disse. Som det ses er fejlene placeret de steder i sinogrammet, hvor der forekommer diskontinuiteter. Disse skyldes høje diskontinuiteter med meget lille udstrækning i referencebilledet, og er blevet undersamplet af den numeriske Radon transformations rutine. En bedre implementering med oversampling, vil kunne nedbringe denne type fejl.



Figur 8.7: Differens mellem numerisk og analytisk genereret sinogram af Shepp-Logan fantom.

8.5 Brug af fantomer

Før de fantomer der skal bruges bliver konstrueret, bør følgende spørgsmål overvejes:

- Hvad skal fantomerne teste for?
- Hvorledes ser er godt PET fantom ud?
- Hvor realistisk behøver et fantom at være?

Fantomerne skal til en vis grad forsøge at undersøge de forskellige algoritmer i grænsetilfældene, og ting der normalt undersøges er:

- Hvor præcist kan et givent niveau gengives?
- Hvor nøjagtigt kan en diskontinuitet gengives?
- Hvor små strukturer kan gengives entydigt?
- Hvor meget baggrundsstøj er der i rekonstruktionen?
- Hvorledes rekonstrueres data med støj?
- Hvor lang tid tager rekonstruktionen?

Formålet med dette er selvfølgelig at få rekonstruktions algoritmer der opfører sig bedst muligt i alle kategorier. Dette strider mod teorien, da det bør være applikationen der sætter kravene til algoritmen. I en aktuel applikation vil det gerne være et af kravene hovedvægten specielt lægges på fremfor de andre, f.eks. evnen til at kunne udskille små strukturer.

Det mål der i den sidste ende skal nås er *brugbare billeder*. Blot afhænger brugbarheden af et billede af anvendelsen. Et æstetisk pænt billede der ikke kan give den ønskede information kan ikke bruges, mens et 'grimt' billede der giver den ønskede medicinske information vil være at foretrække. Ligeledes er et billede der er ideelt til én applikation ikke nødvendigvis anvendeligt til en anden. Dette problematiserer vurderingen af algoritmerne, da rekonstruktions algoritmerne skal udvikles til 'PET rekonstruktion'. Sådan et udtryk kan dække over mange former for undersøgelser og forsøgstyper, der ikke har samme kriterier for vurdering af et billedes godhed.

En mulig måde at løse dette problem på, er at forsøge at lave algoritmerne så gode som muligt på alle punkter. Til en aktuel applikation kan der måske ofres noget af funktionaliteten på et punkt for at få bedre egenskaber på et andet.

Hvis de problemer som rekonstruktions algoritmerne normalt har, identificeres, og fantomer genereres således, at de kan teste for disse fejl, vil fantomerne få et specielt udseende, der ikke har meget med 'virkelige' data at gøre, men da fantomerne er i stand til at isolere de forskellige rekonstruktions problemer fra hinanden visuelt, kan de således også vurdere algoritmerne på de punkter, hvor der er erkendt problemer. Således er det ikke er nødvendigt med en høj grad af realisme i fantomerne. Algoritmer optimeret med sådanne fantomer, vil også kunne rekonstruere rigtige PET data fornuftigt, da disse langt fra vil være så krævende.

Derfor må der nødvendigvis også indføres en form for objektivt mål for rekonstruktionernes godhed. Det ønskes, at det med visuel inspektion er muligt at påpege et forhold mellem de diskrete rekonstruktionsparametre og den visuelle kvalitet af det rekonstruerede billede. Dette er muligt, hvis der bliver udført simuleringer med computergenererede data. En rekonstruktions algoritmes godhed defineres her til at være afhængig af:

- Et eller flere opstillede mål for den kvantitative fejleffekt i forhold til et referencebillede.
- En visuel kvalitativ vurdering af antallet af artifakter og størrelsen af disse.

Hvor en *artifakt* defineres som en struktur eller egenskab i det rekonstruerede billede, der ikke forekom i det originale billede eller objekt. De to opstillede mål vil til dels være koblede, da artifakter følgeligt vil påvirke et fejlmål negativt, men vil i uheldige tilfælde kunne hindre detekteringen af små strukturer og niveau forskelle. Dette nødvendiggør en visuel kontrol.

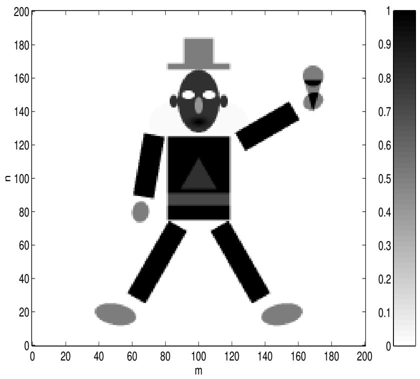
Et meget brugt fantom til at teste computer-tomografi rekonstruktions algoritmer med, er *Shepp-Logan* fantomet (se figur 8.3), som er et analytisk defineret hjerne fantom. Dette er oprindeligt udviklet til CT brug, men har dog fundet indpas inden for alle områder for rekonstruktion fra projektioner. Hvad PET angår er det en meget dårlig repræsentation af den forventede emissions distribution i et hoved, men indeholder dog momenter der kan bruges til at kvalitetsvurdere rekonstruktions algoritmer med generelt. Derudover har det den fordel som 'de facto' standard, at det til en vis grad kan bruges som sammenligningsgrundlag.

8.6 Konstruerede fantomer

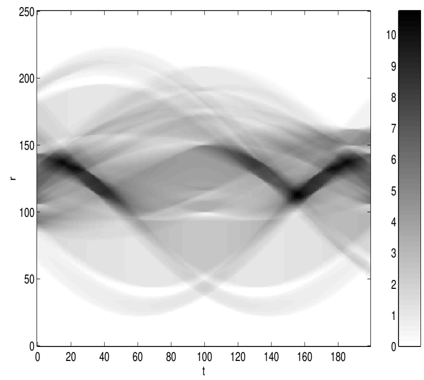
Til at teste rekonstruktions algoritmerne med, er der blevet konstrueret fire forskellige analytiske fantomer, hver med forskellige egenskaber. Disse fantomer vil ligge til grund for den endelige vurdering af algoritmerne. Alle de viste fantomer og sinogrammer er genereret med brug af oversampling. De analytiske beskrivelser for hvert fantom findes i appendix B.

8.6.1 *man* fantomet

Dette fantom er konstrueret således, at det indeholder de samme momenter som Shepp-Logan fantomet, blot er det hovedsagligt opbygget af firkanter og trekanter, der er svære at rekonstruere, da de giver større diskontinuiteter i sinogrammet. Manden har en trekant på maven med en lille niveauforskel fra resten af maven. Fantomet er konstrueret asymmetrisk for at teste for rotations- eller spejlingsproblemer.



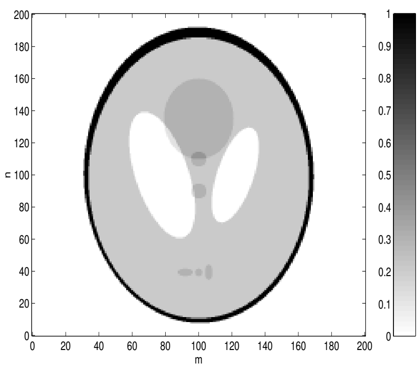
Figur 8.8: *man* fantom.



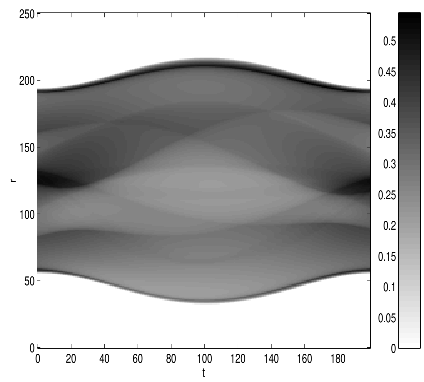
Figur 8.9: Sinogram af *man*.

8.6.2 *phantom* fantomet

Dette fantom er det originale 'Shepp-Logan' fantom (se [Jai89]), blot er nogle af ellipsernes styrke ændret for at forbedre kontrasten. I det originale fantom var kontrasten meget dårlig.



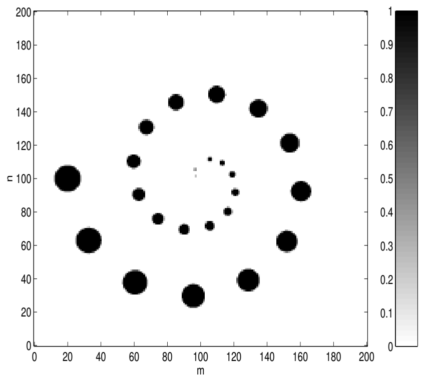
Figur 8.10: *phantom* fantom.



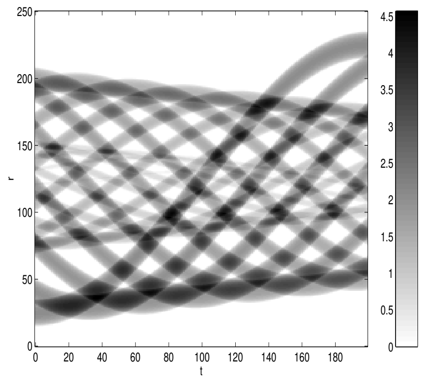
Figur 8.11: Sinogram af *phantom*.

8.6.3 *spiral* fantomet

Dette fantom er opbygget af cirkler der snor sig indad mod midten af billedet i en spiral. Cirklerne bliver mindre, jo længere de når ind mod midten. Der er 23 cirkler i alt. Dette fantom kan teste hvor små strukturer algoritmerne er i stand til at rekonstruere.



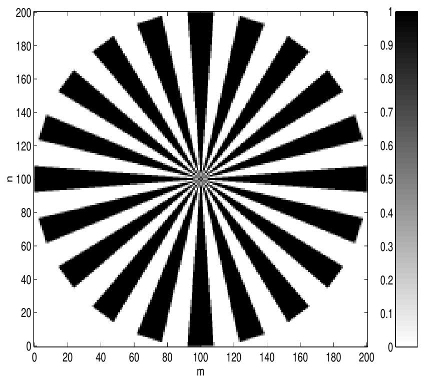
Figur 8.12: *spiral* fantom.



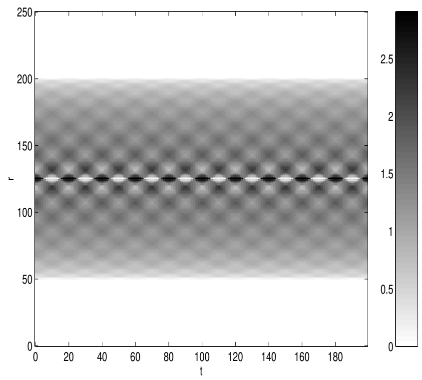
Figur 8.13: Sinogram af *spiral*.

8.6.4 *radial* fantomet

Dette fantom er opbygget af trekanter, der 'stråler' ud fra midten. Dette kan bruges til at teste den spatiale opløsning af rekonstruktions algoritmerne, da der forekommer meget høje spatiale frekvenser i dette fantom.



Figur 8.14: *radial* fantom.



Figur 8.15: Sinogram af *radial*.

8.7 Resumé

I dette kapitel er brugen af fantomer i PET blevet beskrevet. To metoder til generering af computer simulerede Radon transformations-par er blevet diskuteret. Den analytiske metode er blevet valgt til at generere de fantomer der er blevet brugt i dette projekt, og de fire genererede fantomer er blevet præsenteret.